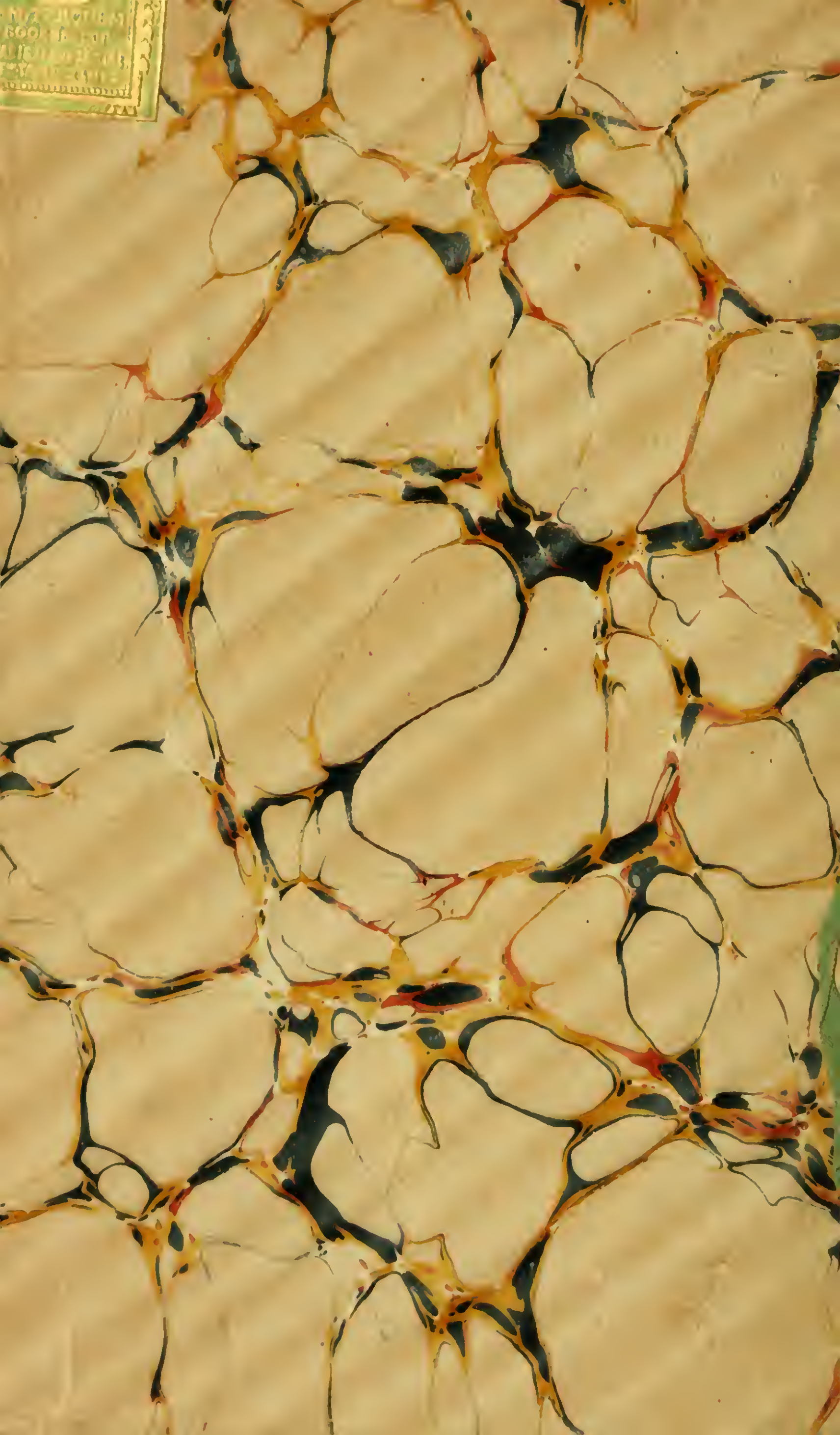
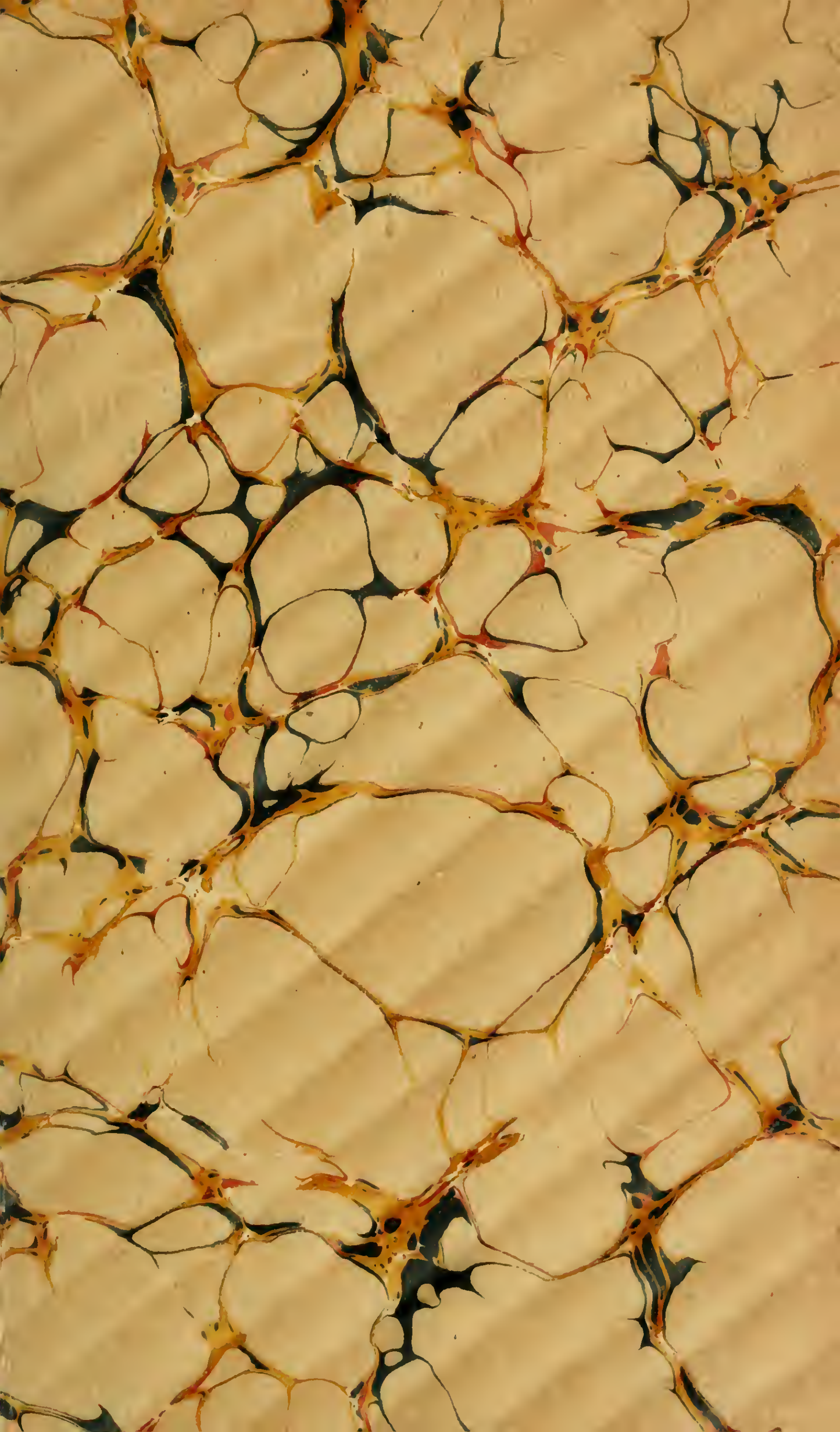

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01078124 3





THÉORIE
DE LA FIGURE
DE LA TERRE.

THÉORIE
DE LA FIGURE
DE LA TERRE,

TIRÉE DES PRINCIPES DE L'HYDROSTATIQUE;

PAR CLAIRAUT,

De l'Académie royale des Sciences, et de la Société royale de Londres.

SECONDE ÉDITION.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1808.

On trouve à la même adresse un assortiment des plus complets d'ouvrages sur les Sciences, principalement sur les Mathématiques, et les Auteurs les plus rares, comme on peut le voir dans l'extrait de son Catalogue, qui se trouve à la fin de cet Ouvrage.

A MONSEIGNEUR

LE COMTE DE MAUREPAS,

Ministre et Secrétaire d'État de la Marine,
Commandeur des Ordres du Roi.

MONSEIGNEUR,

La protection que vous accordez aux sciences, et les bontés dont vous m'honorez, ne sont pas les seuls mo-

tifs qui me déterminent à vous présenter cet Ouvrage ; il vous appartient, MONSEIGNEUR, *par des droits particuliers ; je m'y suis proposé de faire connaître une nouvelle utilité des fameuses opérations faites pour déterminer la figure de la Terre, il est bien juste que j'en fasse un hommage public à celui sous les auspices et par la protection duquel ces opérations ont été faites.*

Je suis avec un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble et très-obéissant
Serviteur, CLAIRAUT.

INTRODUCTION.

QUAND on considère tout ce qui compose la surface de notre globe, les continens, les mers, les lacs, les montagnes, les courans des fleuves, etc.; on est d'abord porté à croire que toutes les recherches que peut fournir la théorie pour déterminer la figure de la terre, sont de vaines spéculations, et que même la mesure actuelle, ne saurait nous en faire connaître que de très-petites parties, sans en pouvoir rien conclure pour le tout.

Quand on remarque ensuite que les mers communiquent ensemble de toutes parts, que les côtes ne sont que très-peu élevées au-dessus de la mer, que la hauteur des plus grandes montagnes est presque nulle en comparaison du diamètre de la terre, que la déclivité des plus grands fleuves

ne suppose pas que leurs sources soient plus élevées (1) au-dessus du niveau de la mer, que ne le sont les montagnes ; on vient bientôt à reconnaître que la figure de la terre doit dépendre des lois de l'hydrostatique, et que les opérations faites pour la mesurer doivent donner à peu près les mêmes résultats que si on les faisait sur une masse d'eau qui se serait durcie après avoir pris la figure que demande l'équilibre.

Mais les lois de l'hydrostatique ne pourraient-elles pas permettre que cette masse d'eau eût une forme irrégulière, qu'elle fût aplatie par un

(1) Pour éclaircir par un exemple ce que je viens d'avancer, je ferai remarquer que la Seine, dont le niveau a été observé avec tant de soin par M. Picard, a environ 1 pied de pente sur 1000 toises. Or, qu'on suppose une rivière deux ou trois fois plus rapide et que son cours soit de 2000 lieues, on n'aura pas une lieue pour la hauteur de la source au-dessus de l'embouchure.

pôle, alongée par l'autre, et que les méridiens ne fussent pas semblables? En ce cas, les opérations faites en Laponie, en France et au Pérou, ne pourraient nous donner la vraie figure de la terre? Voyons donc ce que demandent les lois de l'hydrostatique.

On sait, par les premiers principes de cette science, qu'un fluide ne saurait être en repos, à moins que sa surface ne soit de niveau, c'est-à-dire perpendiculaire à la ligne à plomb, parce qu'alors chaque goutte n'a pas plus de pente à couler d'un côté que d'un autre.

De là il suit, que si la force avec laquelle tous les corps tombent était toujours dirigée vers un même centre, la Terre devrait être parfaitement ronde, afin que les eaux qui la couvrent fussent en équilibre; mais si, au contraire, la direction de la pe-

santeur suit une ligne qui ne passe pas par le centre, la Terre ne sera plus sphérique, mais elle aura la forme nécessaire, pour qu'en chacun des points de sa surface elle soit coupée perpendiculairement par la direction de la pesanteur en ce point.

Toute la question de la Figure de la Terre est donc fondée sur la loi suivant laquelle la force de la pesanteur agit. Si cette force dépend d'une cause qui tire les corps tantôt d'un côté et tantôt d'un autre, qui n'agisse pas sur tous les méridiens de la même manière, qui augmente et diminue sans aucune règle; on ne pourra jamais espérer de connaître la figure de la Terre, et la théorie ni la pratique ne pourront la déterminer.

L'astronomie nous apprend que la force qui retient la Lune dans son orbite, est la même que celle qui fait tomber les corps ici bas; que cette

force agit dans tout l'univers ; qu'elle pousse les planètes vers le Soleil, et les satellites vers leurs planètes principales ; mais si toutes ces impulsions d'une même force suivent, ainsi que les observations astronomiques nous l'apprennent, des lois constantes, quoi de plus naturel que de penser que cette force, qui agit si régulièrement sur les corps célestes, agit de même sur la surface et au-dedans de la Terre ?

Il y a plus, nous apprenons par des observations faites en divers lieux, que la force avec laquelle les corps tombent sur la Terre, diminue en allant du nord au sud, et que cette diminution se fait régulièrement. Et quoique ces observations ne nous apprennent à mesurer que l'effort de la pesanteur sans nous apprendre sa direction, c'est-à-dire, sans nous montrer de combien elle écarte les corps

de la ligne tirée au centre, nous ne pouvons pas douter, ce me semble, que cette force ne suive une loi aussi régulière dans sa direction que dans la quantité de son impulsion; car ce serait être bien peu physicien, que d'abandonner tout ce que les observations astronomiques et géographiques nous apprennent, pour se livrer à une hypothèse dans laquelle la pesanteur pousserait les corps tantôt d'un côté, tantôt d'un autre, et ferait de la Terre un corps irrégulier.

Mais si tous ces phénomènes nous indiquent que la force de la pesanteur agit régulièrement, ils ne nous montrent pas exactement la loi suivant laquelle se fait son action sur la surface et au-dedans de la Terre; car on va voir que cette loi dépend du système de physique qu'on embrasse, et que par conséquent la théorie

seule ne peut pas donner la vraie figure de la Terre.

Examinons d'abord la manière dont la gravité (1) agit dans le système des tourbillons, et la figure de la Terre qu'elle demande.

L'illustre Descartes, qui n'avait pas été à portée de connaître les lois que les planètes observent dans leurs mouvemens, ne croyait avoir à expliquer dans le phénomène de la gravité, que cette tendance que tous les corps ont ici-bas vers le centre de la Terre. Pour en trouver la raison, il supposa que la Terre était enveloppée d'un

---

(1) Je fais ici la même distinction que M. de Maupertuis (la Figure de la Terre déterminée, etc.) entre la pesanteur et la gravité; j'entends par pesanteur, la force naturelle avec laquelle tout corps tombe, et j'appelle gravité la force avec laquelle ce corps tomberait, si la rotation de la Terre n'altérait pas son effort et sa direction

tourbillon de matière subtile qui circulait sans cesse, et comme cette matière en circulant devait faire un effort pour s'écarter du centre du tourbillon, il prétendit que les corps graves ayant moins de force centrifuge que cette matière, ils cédaient à son effort, et étaient chassés vers le centre de la Terre.

Depuis que M. Newton a paru, les Cartésiens éclairés ont été forcés de reconnaître, que la force de la pesanteur était répandue dans tout l'univers; ils sont enfin convenus que la Lune est un corps grave qui pèse vers la Terre; que la Terre et toutes les planètes ont une semblable gravité vers le Soleil, ainsi que les satellites vers leurs planètes principales, et se trouvant encore obligés d'avouer que toutes ces gravités augmentent dans la même raison que le carré de la distance au corps central diminue,

ils ont cherché à tirer de leurs principes l'explication de ces phénomènes.

A l'exemple de Descartes, ils ont eu recours à la force centrifuge des tourbillons de matière subtile qui enveloppent et traversent chaque planète, et ils ont prétendu que cette force centrifuge donnait la loi du carré des distances que tous les graves observent. Mais comme, dans leurs principes, la matière subtile pousse les corps au centre du tourbillon, et que la force de cette matière ne dépend ni de la grandeur, ni de la densité, ni de la figure du corps central, il en est, suivant ces philosophes, des corps placés sur la surface et au dedans de la Terre, comme de ceux qui sont au-dehors à des distances considérables; ils doivent tous être dirigés également vers le centre, avec une force qui soit en raison renversée du carré de la dis-

tance à ce centre. Or cette loi de gravité demande nécessairement que la Terre ait une certaine figure.

Pour trouver cette figure, il faut commencer par examiner les changemens que la rotation de la Terre produit dans la direction et dans la quantité de la force de la gravité.

On sait que tous les corps qui tournent autour d'un axe dans le même temps, font pour s'en écarter, un effort proportionnel à leur distance à cet axe. On sait, de plus, qu'à l'équateur cet effort est la 288ème partie de celui de la pesanteur, de là on tire facilement quel il doit être dans un lieu quelconque.

Cela posé, pour trouver la force qui pousse un corps grave dans un lieu quelconque de la Terre, on se sert de ce principe si connu, qu'un corps sollicité par deux forces décrit la diagonale d'un parallélogramme,

dont les deux côtés représentent ces deux forces. On prend donc une ligne qui exprime la force avec laquelle le corps tomberait si la Terre ne tournait point, et une autre ligne qui exprime l'effort qui vient de la rotation de la Terre ; sur ces deux lignes on forme un parallélogramme, dont la diagonale donne la direction suivant laquelle le corps tombe au lieu donné.

Il n'est pas difficile ensuite à ceux qui ont le calcul familier, de trouver la figure que la Terre doit avoir, afin que sa surface se trouve par-tout coupée perpendiculairement par la direction de la pesanteur, et que par conséquent cette surface soit de niveau. Par ce calcul, on trouve que la Terre est un sphéroïde aplati vers les pôles, dont l'axe doit être au diamètre de l'équateur dans la raison de 576 à 577. Voilà donc la figure de la Terre que demande la loi de pe-

santeur tirée du système des tourbillons, tel qu'il est présenté aujourd'hui par de nouveaux Cartésiens qui ont reconnu une partie du système de M. Newton : passons présentement à la figure de la Terre qui résulte du système de M. Newton admis entièrement.

Ce grand philosophe, après avoir tiré des analogies de Kepler la loi générale suivant laquelle les planètes sont poussées vers leur centre commun, examina de plus près cette loi, et il vit qu'elle souffrait quelque correction quand les planètes étaient à une certaine proximité les unes des autres; que la Lune, par exemple, ne décrivait pas exactement la même courbe qu'elle décrirait si elle était seulement attirée par la Terre; que la Terre ne parcourait pas non plus la même orbite que si le Soleil seul agissait sur elle, etc. Il se servit de l'astrono-

mie la plus délicate pour connaître ces dérangemens, et il trouva qu'ils étaient tels que la géométrie le demande, en supposant que la Lune, au lieu d'être attirée seulement par la Terre, le soit encore par le Soleil, et que la Lune et le Soleil agissent sur la Terre, ainsi que la Terre et la Lune sur le Soleil, en supposant toujours leur action proportionnelle à la masse du corps attirant, et dans la raison inverse du carré de la distance.

Cette tendance des planètes les unes vers les utres, ayant été indiquee à M. Newton par tous les phenomènes, il a régardé la gravitation comme une force universelle. En conséquence, il établit pour principe, que chaque particule de matière agit sur toutes celles qui sont dans l'univers proportionnellement à sa masse et à la raison inverse du carré de sa distance.

De là il est aisé de conclure que la pesanteur au-dedans et sur la surface de la Terre n'a plus pour direction la ligne tirée au centre: car un corps placé en un lieu quelconque de la Terre, est attiré à la fois par toutes les particules dont elle est composée, chacune agissant plus ou moins obliquement suivant sa position et avec plus ou moins de force suivant sa distance. Des attractions de toutes ces particules résulte une seule force qui ne tire plus le corps au centre; mais suivant une ligne d'autant plus écartée du rayon, que la Terre est plus éloignée d'être sphérique; et la ro-portion suivant laquelle cette force varie depuis l'équateur jusqu'au pôle, et de la surface de la Terre jusqu'au centre, ne sera plus en raison renversée du carré de la distance au centre, mais sera composée des forces de toutes ces particules combinées

avec tous les carrés de leurs distances au corps grave.

Il est bien vrai que la somme de toutes les attractions des particules de la Terre, et par conséquent l'attraction de la Terre même sur un corps placé à une distance considérable, sur la Lune par exemple, est toujours censée dirigée vers le centre, et agir suivant la raison inverse du carré des distances; mais cela vient de ce que l'éloignement de la Lune rend insensible la différence qui est entre la figure de la Terre et celle d'une sphère, et qu'on regarde, en ce cas, la Terre comme un globe (1) parfait, ce qu'on ne peut faire dans

(1) Pour bien entendre ceci, il faut savoir que la loi d'attraction suivant laquelle toutes les parties de la matière s'attirent réciproquement en raison renversée du quarré des distances, a cette propriété, que deux sphères, quelles que soient leurs masses, s'attirent avec la même force que si chacune avait sa quantité de matière réunie à

les cas où l'on considère les corps qui sont sur sa surface ou dans son intérieur.

Présentement il est bien facile de voir que la détermination de la figure de la Terre, dans le système de l'attraction, est une recherche bien différente de celle qu'on se propose dans le système des tourbillons. Car dans l'hypothèse des tourbillons, on a la loi de la pesanteur avant d'avoir la figure de la Terre, au lieu que dans le système de l'attraction on a deux objets à chercher à la fois : les Neutoniens doivent donc trouver un sphéroïde tel qu'un corpuscule placé dans un lieu quelconque de sa surface et qui est sollicité en même temps par la force centrifuge et par les attractions de toutes les parties du sphé-

---

son centre. Cette proposition est démontrée fort clairement dans un mémoire de M. de Maupertuis *Mém. de l'Académie*, 1732

roïde, prenne une direction perpendiculaire à cette surface.

Ce problème étant résolu, on trouve encore, comme dans le système des tourbillons, que la Terre doit être aplatie; mais le rapport de ses axes au lieu d'être celui de 576 à 577, est celui de 230 à 231, différence assez sensible.

Cette différence des aplatissemens que donnent les deux systèmes qu'on vient d'exposer, n'est pas la seule indécision où la théorie laissait les géomètres avant les mesures actuelles; il y en avait une autre d'autant plus importante, qu'elle devait être sentie par chacun de ceux qui avaient pris parti pour l'un ou pour l'autre de ces deux systèmes: c'est que les Neutoniens ne pouvaient pas regarder le rapport de 230 à 231, comme le seul que leur système pût donner, et que les Cartésiens ne pouvaient pas non

plus admettre le rapport de 576 à 577, comme le seul qui suivît de leurs principes : examinons d'abord ce qui regarde le système de M. Newton.

Dans ce système, on trouve pour le rapport des axes de la Terre, celui de 230 à 231, uniquement parce qu'on y suppose la matière de la Terre entièrement homogène; mais il est très-possible que les parties les plus proches du centre soient plus denses que les autres, et cela est même très-vraisemblable. Dans ce cas, la force de gravité d'un corps étant le résultat de toutes les attractions qu'exercent sur lui toutes les parties de la Terre, le plus ou le moins de densité de ces parties changera entièrement la loi suivant laquelle les corps graviteront, et de là le rapport des axes sera différent suivant les différens arrangemens et la

différente densité des parties intérieures de la Terre.

Dans le système des Cartésiens, ces considérations semblent d'abord n'avoir plus lieu ; car nous avons vu que le rapport de 576 à 577, qu'ils trouvent entre les axes de la Terre, est celui qui doit résulter de la supposition que les corps placés sur la surface et au-dedans de la Terre, sont poussés de la même manière que ceux qui sont à une distance considérable de son centre : or, comme tous les Cartésiens l'ont supposé jusqu'à présent, on ne croirait pas qu'on pût tirer un autre rapport de leurs principes ; mais ces philosophes ne sont pas plus restreints à cette supposition qu'à toute autre : car, après tout ce qu'ils ont su faire de la matière subtile, ils peuvent très-bien encore imaginer que lorsque cette matière traverse les parties intérieures

de la Terre, elle n'agit plus de la même manière qu'au-dehors, et que par conséquent la loi du carré des distances peut ne pas avoir lieu pour ces parties. Ils peuvent dire aussi que la matière subtile au lieu de pousser tous les corps vers un seul centre, les pousse perpendiculairement à une espèce de noyau mis au centre de la Terre, etc.

Ainsi, ni dans le système des tourbillons, ni dans celui de l'attraction, on ne saurait fixer précisément la loi suivant laquelle la pesanteur agit sur la surface et au-dedans de la Terre, et par conséquent la théorie seule ne peut donner avec exactitude la figure de la Terre; mais aussi sans la théorie qui nous fait voir que la Terre doit avoir une figure régulière, on ne pourrait pas se reposer sur les opérations faites au nord et au sud pour déterminer cette figure, il faudrait

mesurer sans cesse à toutes les latitudes et à toutes les longitudes.

L'avantage qu'on peut retirer de la théorie en examinant la question de la figure de la Terre, ne se borne pas à rendre les mesures actuelles décisives ; la liaison que cette question a nécessairement avec celle de la pesanteur, montre encore que la vraie figure de la Terre étant connue par le secours des mesures actuelles, la théorie en doit tirer de grandes lumières pour le système général du monde.

Afin d'employer, suivant cette vue, le concours de la théorie et des observations, j'ai cherché d'abord le rapport des axes de la Terre et la variation de la pesanteur sur sa surface, par une méthode qui convient à quelque hypothèse de gravité que ce soit ; et j'ai comparé ensuite les résultats que donnent les hypothèses

les plus vraisemblables, avec ceux que donnent les mesures actuelles.

La première utilité qu'on peut tirer de cette comparaison, c'est d'exclure beaucoup d'hypothèses sur la loi de gravité auxquelles on se serait peut-être arrêté par leur simplicité. On peut démontrer, par exemple, qu'il faut rejeter toutes les hypothèses dans lesquelles les corps graviteraient vers le centre de la Terre, quelle que fût la loi suivant laquelle ils y fussent poussés: car je fais voir que toutes ces hypothèses donneraient pour le rapport de l'axe au diamètre de l'équateur, celui de 576 à 577, ou un rapport approchant. Or comme le rapport des axes que donne la comparaison du degré mesuré en Laponie avec celui qui a été mesuré en France, est trop loin de celui de 576 à 577 pour pouvoir y être réduit, en ne supposant dans les observations que les lé-

gères erreurs qui pourraient s'y être glissées, il faut donc abandonner toutes les hypothèses qui donneront ce rapport.

Mais la comparaison de la théorie avec les observations pourra être d'une utilité plus importante que l'exclusion de quelques hypothèses particulières : elle achèvera peut-être de décider en faveur d'un système qui a déjà tant d'apparence d'être vrai, je veux dire celui de M. Newton. Car l'attraction étant supposée, je démontre dans cet ouvrage, que dans toutes les hypothèses les plus vraisemblables qu'on puisse faire sur la densité des parties intérieures de la Terre, il y a toujours une telle liaison entre la fraction qui exprime la différence des axes, et celle qui exprime la diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur, que si l'une de ces deux fractions surpasse $\frac{1}{230}$, l'autre doit être

moindre, et précisément de la même quantité. Or, comme toutes les expériences qu'on a faites sur la longueur du pendule nous montrent que la diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur est plus grande que $\frac{1}{230}$, on en doit conclure que la différence des axes est moindre que $\frac{1}{230}$. Il n'est donc plus question que de savoir si cette conclusion s'accorde avec les mesures actuelles; c'est ce que nous saurons après le retour des Académiciens qui sont allés au Pérou, car la grande différence qui doit être entre le degré qu'ils ont mesuré et celui que nous avons mesuré en Laponie, doit nous apprendre le vrai rapport des axes.

L'accord des mesures actuelles avec la théorie, n'est pas la seule épreuve qu'un système doive subir avant d'être admis; il en faut encore une que l'hydrostatique seule fournit. Il faut exa-

miner si dans ce système les fluides peuvent être en équilibre : car comme on sait par expérience que les mers sont en repos, il est clair qu'il faudrait abandonner tout système dans lequel la pesanteur serait telle, que les fluides ne pourraient pas être en équilibre. On verra dans cet ouvrage, que toutes les lois de pesanteur qui peuvent résulter du système de l'attraction, sont telles, que les fluides y parviennent toujours à l'état d'équilibre.

M. Bouguer est, je crois, celui auquel on doit cette remarque judicieuse, qu'il y a des hypothèses de pesanteur où les fluides ne seraient jamais en équilibre. Cet habile géomètre, en cherchant la figure des planètes dans des hypothèses beaucoup plus générales que celles qu'on avait prises avant lui, trouva que, dans une infinité de cas, la figure que

demande l'équilibre de toutes les colonnes de fluide, qui vont de la surface au centre, n'est pas la même que celle qu'il faut pour que la surface soit coupée perpendiculairement en tous ses points par la direction de la pesanteur, et comme ces deux conditions sont également nécessaires, il conclut qu'une planète ne peut avoir un état permanent que dans les hypothèses où ces deux conditions donneraient la même figure.

Mais si l'on voit, avec M. Bouguer, que ces deux conditions, également nécessaires pour l'équilibre des fluides, ne suivent pas l'une de l'autre, ne pourrait-il pas se faire qu'il y eût encore d'autres conditions à observer, entièrement différentes des deux premières, et cependant aussi nécessaires?

C'est cette réflexion qui m'a engagé à chercher les lois de l'hydro-

statique qui conviennent en général à toutes sortes d'hypothèses de pesanteur : recherche qui m'a paru utile et curieuse (1), indépendamment du rapport qu'elle a avec la figure de la Terre.

J'ai bientôt reconnu qu'il était vrai, ainsi que je l'avais soupçonné, que l'accord des deux principes ordinaires, c'est-à-dire l'équilibre des colonnes et de la tendance perpendiculaire à la surface, n'assurait pas l'équilibre d'une masse fluide ; car j'ai trouvé qu'il y avait une infinité d'hypothèses de pesanteur où ces deux principes donneraient la même courbe, sans que pour cela les efforts de toutes les parties du fluide se contrebalançassent mutuellement. J'ai trouvé ensuite deux méthodes générales et sûres,

(1) On trouvera pag. 105, la manière d'expliquer, par cette théorie, les phénomènes des tuyaux capillaires.

pour reconnaître les hypothèses de pesanteur dans lesquelles les fluides peuvent être en équilibre, et pour déterminer la figure que les planètes doivent avoir dans ces hypothèses.

Avant que de passer à l'explication de ces deux méthodes, il est à propos de lever une difficulté qui se présente assez naturellement sur la rotation des masses fluides. On comprend fort facilement, que lorsqu'un corps est obligé de décrire un cercle, il fait pour s'éloigner de son centre un effort, et que cet effort dépend de sa vîtesse et du rayon du cercle dans lequel il circule; ainsi quand on combine, comme on a fait plus haut, la gravité de chaque particule d'une planète avec l'effort centrifuge de cette particule pour s'écarter de l'axe de rotation, on conçoit cette particule comme obligée de se mouvoir dans un cercle. Mais pourquoi ces parti-

cules circulent-elles toutes ensemble ?

Il est facile de voir comment un corps solide peut conserver de lui-même son mouvement de rotation : car il ne faut, pour cela, que jeter les yeux sur une baguette chargée de deux poids auxquels on donne des impulsions en sens contraire et en raison réciproque de leurs masses ; les mêmes principes qui montrent que cette baguette tournera sans cesse autour de son centre de gravité, feront facilement reconnaître qu'en donnant une fois à un corps solide quelconque une impulsion convenable, il tournera sans cesse autour d'une ligne passant par son centre de gravité. Mais lorsque le corps est fluide, ce n'est plus la même chose ; chaque particule, détachée des autres, semble vouloir faire son mouvement à part, autour du point vers lequel la force de gravité la pousse : il en est d'un

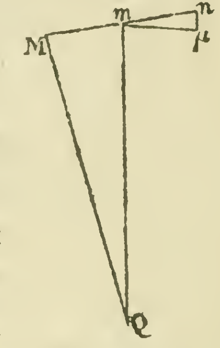
atôme quelconque, comme d'une planète qui décrit une orbite autour d'un corps central en vertu d'une impulsion, et de la force qui la pousse vers le corps central; ainsi, toutes les particules dont une masse fluide est composée, tendent à décrire des courbes qui se croisent continuellement; de là devrait résulter une confusion générale dans la planète. A quoi donc attribuer la rotation régulière autour d'un axe? faut-il aller chercher quelque matière subtile qui emporte toutes les parties de la planète et les conduit comme si elle les poussait dans des tuyaux circulaires? Mais il faudrait alors comprendre la rotation de cette matière subtile, et démontrer quelle ne troublerait pas l'équilibre plutôt que de le produire; il faudrait se jeter dans toutes les difficultés du système du monde. Les seules règles de la mécanique vont

nous donner le dénouement de cette difficulté.

Nous tirerons de la figure même de la planète, la continuation de son mouvement. On va voir que cette figure peut être telle, que toutes les parties du fluide, au lieu de décrire des courbes qui se croisent, se contre-balanceront les unes les autres, de manière qu'il en résultera une pression égale en tous sens, et que chacune de ces parties ne pourra avoir d'autre mouvement que celui de la rotation commune à toute la masse. Il est vrai qu'on n'expliquera pas par-là comment les planètes ont prise d'elles-mêmes leurs figures; mais ne nous suffira-t-il pas de savoir comment elles peuvent le conserver?

Imaginons d'abord, qu'un atôme quelconque de la planète vienne dè parcourir dans un temps infiniment petit, le côté *Mm* d'un cercle, dont

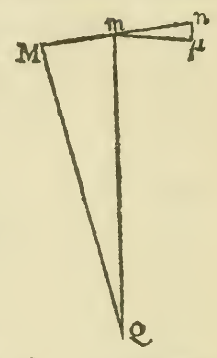
le centre Q est dans l'axe de rotation; s'il était alors abandonné à lui-même, il est certain que dans un second instant égal au premier, il parcourrait mn égal à Mm, et placé sur le prolongement de cette ligne; mais il est certain aussi, qu'au lieu de la force qu'il aurait pour parcourir mn, on peut lui en substituer deux autres; l'une dont la direction est $m\mu$, et qui fait suivre à l'atôme la circonférence dont Qm est le rayon; l'autre, dont la direction est μn, parallèle à Qm, et qui tend à écarter l'atôme du centre Q.



Qu'on suppose maintenant, que toutes les forces telles que Mm, qu'avaient les globules dans le premier instant, aient été proportionnelles à

leur distance MQ à l'axe, il est clair que ni ces forces, ni les forces $m\mu$ qui en résultent pour le second instant, ne pourraient rien changer à la situation respective des parties. Quant aux forces μn qui seraient, ainsi que les forces Mm, proportionnelles à la distance de l'axe de rotation, elles tendraient naturellement à déranger toute la planète, puisque leur effet serait d'écarter de l'axe tous les globules de fluides; mais il est aisé de voir que la figure de la planète peut être telle que cet effet sois détruit : car si ces forces μn, qu'ont chaque particule, sont déduites de la force de la gravité qu'ont les mêmes particules, et qu'on donne à toute la màsse fluide la forme nécessaire pour que toutes ses parties, animées par cette gravité diminuée des forces μn, soient en équilibre entre elles; on verra que chaque par-

ticule, qui, dans le premier instant avait parcouru le petit côté *Mm* placé sur la circonférence d'un cercle, parcourra dans le second instant le second côté *mμ* du même cercle, et ainsi de suite, en-



sorte que toute la planète tournera sans cesse autour de son axe, sans troubler son équilibre ni changer sa figure.

Ainsi lorsqu'on veut chercher la figure que doit avoir une masse fluide qui tourne autour de son axe, on peut la regarder comme si elle était en repos, et comme si elle était composée de parties, qui, au lieu d'être simplement animées par la gravité, fussent outre cela sollicitées par une force qui les écartât de l'axe, et proportionnellement à la distance à cet axe.

THÉORIE DE LA FIGURE DE LA TERRE.

PREMIÈRE PARTIE.

Principes généraux pour trouver les hypothèses dans lesquelles les fluides peuvent être en équilibre, et pour déterminer la figure de la Terre et des autres Planètes, lorsque la loi de la pesanteur est donnée.

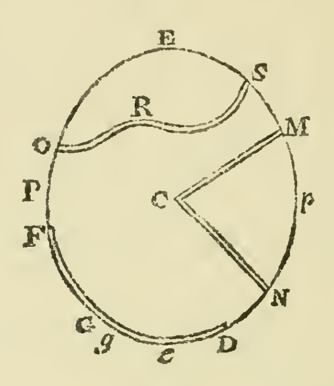
CHAPITRE PREMIER.

Exposition d'un principe général dont l'observation est nécessaire pour l'équilibre des fluides, avec les propositions préliminaires pour faire usage de ce principe.

§ PREMIER.

Une masse de fluide ne saurait être en équilibre, que les efforts de toutes les parties qui sont comprises dans

un canal de figure quelconque qu'on imagine traverser la masse entière, ne se détruisent mutuellement.



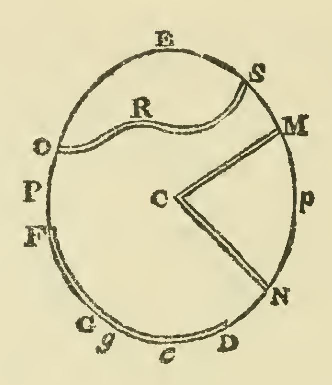
Puisque la masse entière *PEpe* est supposée en équilibre, une partie quelconque du fluide pourrait devenir solide, sans que le reste changeât de situation. Supposons que toute la masse se durcisse, excepté ce qu'il faut de fluide pour former le canal *ORS*, ce canal sera donc en équilibre; or cela ne peut arriver que les efforts de *OR* pour sortir vers *S*, ne soient égaux à ceux de *SR* pour sortir vers *O*.

§ II.

Il est clair que les deux principes ordinairement employés à trouver la figure de la Terre, sont renfermés dans celui que je viens d'exposer. Examinons d'abord le premier de ces deux principes, celui de M. Newton; il consiste à rendre égal le poids des deux colonnes quelconques *MC*, *NC* qui aboutissent au centre. Or comme ces deux colonnes font ensemble un canal *MCN* qui joint, ainsi que *ORS*, deux points quelconques de la surface, il est clair qu'aussitôt qu'on aura rendu la figure *PEep* telle qu'un canal quelconque soit en équilibre, on sera sûr que les colonnes *MC*, *NC*, seront de même poids.

Quant au second principe dû à M. Huygens, il est fondé sur ce que la courbe *PEpe* doit être en tous ses points coupée perpendiculairement par la direction de la pesanteur; or je dis que l'observation de ce principe suit

nécessairement de l'équilibre d'un canal quelconque. Car supposons que le



canal quelconque *ORS* soit devenu le canal *FGD* couché le long de la surface du fluide, ce canal devra être en équilibre comme tous les autres. Mais cela ne saurait arriver que des deux manières suivantes, ou parceque la tendance de la pesanteur en chaque point *G* sera perpendiculaire à la direction *Gg* du canal, ou parcequ'une partie *FG* poussant vers *D* est contrebalancée par l'autre partie *GD* qui pousse vers *F*. Or cette seconde condition ne saurait

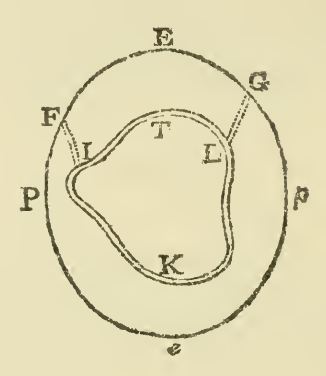
avoir lieu, car comme rien ne fixe la longueur du canal, il faut qu'une partie *FG* soit seule en équilibre aussi bien que toute la longueur *FGD*, ce qui n'arriverait pas, si *FGD* n'avait été en équilibre qu'en conséquence de l'égalité des pressions de *FG* et de *DG*.

§ III.

Afin qu'une masse de fluide puisse être en équilibre, il faut que les efforts de toutes les parties de fluide renfermées dans un canal quelconque rentrant en lui-même, se détruisent mutuellement.

Cette proposition est fondée ainsi que le § I, sur ce que l'équilibre général d'une masse de fluide demande nécessairement l'équilibre de toutes ses parties: qu'on suppose donc que tout le fluide vienne à se durcir, excepté un canal quelconque rentrant en lui-même, il est évident que si la masse entière du fluide était en équilibre, le canal fluide qui reste après le durcissement des par-

ties voisines, doit être aussi en équilibre ; c'est-à-dire que si, sur ce canal, on prend à volonté deux points *I*, *L*,



les efforts des deux parties *IKL*, *ITL* l'une contre l'autre seront égaux, sans quoi il y aurait un courant perpétuel dans ce canal.

On peut regarder encore l'équilibre d'un canal rentrant en lui-même, comme un corollaire de l'équilibre de tout canal qui joint deux points pris à volonté sur la surface ; car si on imagine deux canaux *IF*, *LG* qui partent de deux des

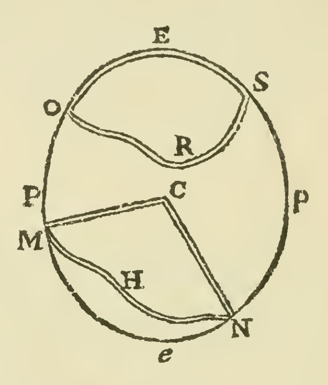
points I, L du canal pour aller à la surface, les deux canaux $FIKLG$, $FITLG$ auront les parties communes FI, LG, et seront chacun en équilibre; retranchant donc les deux poids communs, FI, LG, il restera les deux parties IKL, ITL dont les efforts seront les mêmes.

§ IV.

Après avoir prouvé que l'équilibre d'un canal rentrant en lui-même, suit de l'équilibre d'un canal quelconque qui traverse entièrement le fluide, il nous reste à faire voir que quand la loi, suivant laquelle la pesanteur agit, sera telle qu'un canal quelconque rentrant en lui-même sera en équilibre, il y aura toujours une surface à donner au fluide, telle que tous les canaux qui traverseront la masse entière, seront en équilibre.

Pour le démontrer, nous ferons remarquer, que quand la loi de la pesanteur est donnée, c'est un problème déterterminé que de trouver la figure que doit avoir une planète, afin qu'un des deux

principes ordinaires, celui de M. Huygens, par exemple, soit observé. Supposons donc que *PEpe* soit la figure determinée par ce principe, et de plus qu'on



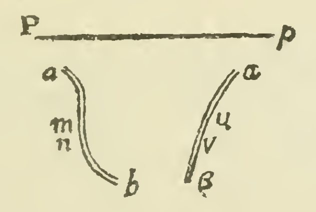
ait reconnu qu'un canal quelconque ren trant en lui-même, est toujours en équilibre, il s'ensuivra qu'un canal *OESR* dont une partie *OES* serait couchée sur la surface, serait aussi en équilibre; mais la partie *OES* par l'observation supposée du principe de M. Huygens, ne fera d'effort ni vers *O* ni vers *S*; donc le canal *ORS* sera en équilibre.

Il en serait de même si on avait déterminé la surface par le principe de

M. Newton, car de l'équilibre des canaux quelconques rentrant en eux-mêmes suivrait l'équilibre d'un canal *MCNH*; mais *MCN* serait en équilibre par l'hypothèse : donc *MHN* y serait aussi.

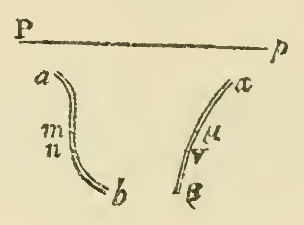
§ V

Si deux canaux ab, aβ *remplis de fluide, et tournant autour d'un axe* Pp, *ont leurs extrémités* a b; *α, β, à des*



distances de l'axe Pp, *qui soient respectivement égales, l'effort total que la force centrifuge fera faire au fluide renfermé dans le canal* ab *pour le faire sortir par* b, *sera le même que l'effort total que la force centrifuge fera faire au fluide renfermè dans le canal aβ pour le faire sortir par β.*

Pour le prouver, imaginons que chacun des canaux ab, $\alpha\beta$ soit partagé en une infinité de petits cylindres mn, $\mu\nu$ dont les extrémités soient aussi à des distances de l'axe, qui soient respecti-



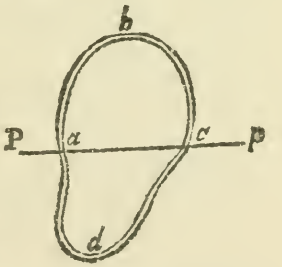
vement égales. A cause de la petitesse de mn et de $\mu\nu$, on pourra regarder les forces centrifuges comme constantes dans toutes les particules qui composent les petits cylindres mn et $\mu\nu$: de plus, la révolution de toutes les parties du fluide se faisant dans le même temps, la force centrifuge sera la même en m et en μ ; mais les parties de ces forces qui agiront dans les directions mn et $\mu\nu$, seront par la théorie des plans inclinés réciproquement comme les longueurs mn et $\mu\nu$, et les masses seront comme les longueurs mêmes : donc les efforts de

mn et de $\mu\nu$, vers *b* et vers β seront égaux : donc l'effort total de *ab* et celui de $\alpha\beta$ seront aussi égaux.

§ VI.

Lorsqu'on veut examiner si une loi de gravité est telle qu'une masse de fluide qui tourne autour d'un axe puisse conserver une forme constante, il est inutile de faire attention à la force centrifuge ; c'est-à-dire, que si la masse de fluide peut avoir une forme constante sans tourner, elle pourra aussi en avoir une en tournant.

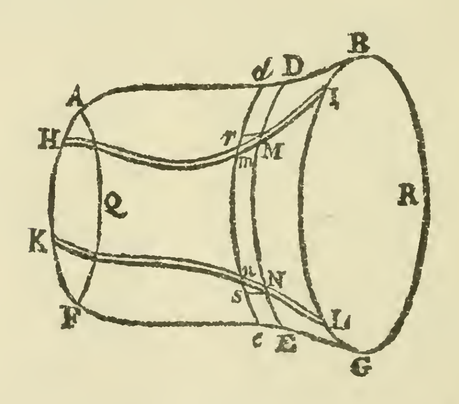
Par le § III, il faut qu'un canal quelconque *abcd* rentrant en lui-même, soit en équilibre, afin qu'une masse de fluide puisse conserver une forme constante. Par le § précédent, la somme des efforts de la force centrifuge sur *abcd* doit être nulle, puisque *ab* et *cd* se presseront également en *b*, ainsi



que *ad* et *cd* en *d* : donc la rotation n'empêchera pas l'équilibre d'un canal quelconque rentrant en lui-même, et par conséquent si ce canal est en équilibre, en ne considérant que la seule gravité, il le sera encore en supposant au lieu de la gravité, la pesanteur actuelle composée de la gravité et de la force centrifuge.

§ VII.

La force de la pesanteur étant supposée la même dans tous les points d'un



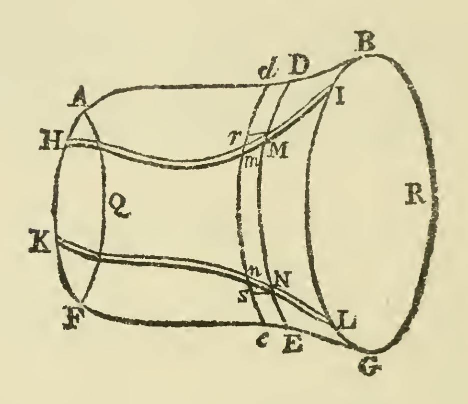
cercle parallèle à l'équateur, si deux canaux HI, KL *remplis d'un même*

fluide sont terminés par deux cercles quelconques AHKFQ, BILGR *parallèles à l'équateur, et sont l'un et l'autre placés sur une même surface de circonvolution* AFGB, *dont ces deux cercles sont deux tranches ; je dis que les poids de ces deux canaux seront les mêmes.*

De ce que la pesanteur agit de la même manière dans tous les points d'un parallèle à l'équateur, il s'ensuit qu'un corps qui serait placé en un point quelconque *M* sur la surface *ABGF* sans pouvoir sortir de cette surface, ne pourrait prendre d'autre direction que celle du méridien *Mr* ; supposant donc que *Mm* et *Nn* soient deux tranches des canaux *HI*, *KL* coupées par des plans *DE*, *de*, parallèles à l'équateur, les forces qui agiront sur les particules de ces petits cylindres, auront pour direction *Mr* et *Ns*, et de plus seront égales.

Cela posé, comme les parties des forces *Mr* et *Ns* qui agissent dans les directions *Mm* et *Nn* des cylindres, seront en raison renversée des longueurs

Mm et *Nn*, et que les masses seront en raison directe des mêmes longueurs,



les poids de *Mm* et de *Nn* seront les mêmes : donc les poids entiers de *HI* et de *KL* seront aussi égaux entre eux.

§ VIII.

PRINCIPE GÉNÉRAL.

Pour qu'un sphéroïde fluide tournant autour de son axe, et dans lequel la loi de la gravité est donnée, puisse conserver une forme constante, il suf-

sît qu'un canal quelconque rentrant en lui-même, et placé dans le plan du méridien de ce sphéroïde, soit toujours en équilibre, en ne considérant que la seule force de la gravité sans la force centrifuge.

Par le § VI, il suffit de faire voir que les efforts qui proviennent de la gravité sur toutes les parties d'un canal rentrant en lui-même se détruisent, ou ce qui revient au même, que le poids d'un canal quelconque *HI*, soit le même que celui de tout autre canal qui passerait par les mêmes points *H*, *I*; mais par le § précédent, si *ABFG* est la surface de circonvolution sur laquelle est placé le canal *HI*, le poids du canal *AB* qui serait la rencontre de cette surface par le plan d'un méridien, serait le même que celui de *HI* : donc il suffit de voir qu'un canal quelconque rentrant en lui-même et placé dans un méridien, soit en équilibre, pour être sûr que toutes les parties du sphéroïde y seront.

Du principe que je viens d'exposer, je pourrais tirer maintenant la méthode générale de déterminer toutes les hypo-

thèses de pesanteur, dans lesquelles un fluide peut être en équilibre ; mais comme les hypothèses qu'on a le plus communément employées, se peuvent aisément traiter sans le secours de la méthode générale, je commencerai par l'examen de ces hypothèses.

CHAPITRE II.

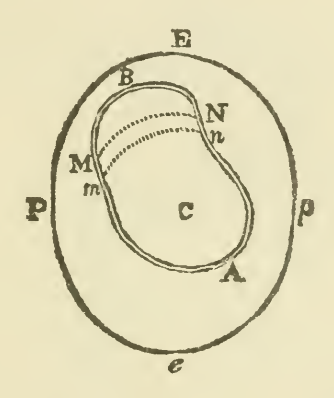
De l'équilibre des fluides dans lesquels la gravité est le résultat de plusieurs forces quelconques qui poussent chacune vers un centre particulier.

§ IX.

Lorsqu'il n'y a qu'un centre de tendance.

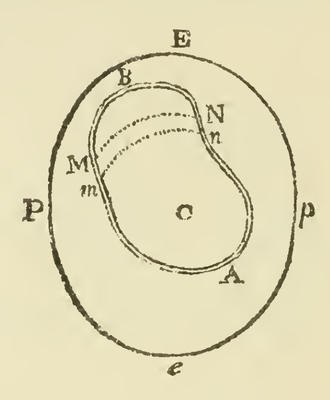
Toutes les parties d'une masse fluide qui tourne autour d'un axe, étant animées d'une force qui les pousse vers un centre, et suivant une loi qui ne dépend que de la distance à ce centre, il est extrêmement facile de s'assurer que la masse fluide prendra une forme où elle sera en équilibre.

Car par le § III une masse de fluide pourra arriver à un état permanent, si un canal quelconque rentrant en lui-même est en équilibre, en ne considérant que la seule force de la gravité.



Soit donc *MBNA* un canal quelconque rentrant en lui-même; il est clair que si du centre *C* on décrit une infinité d'arcs, tels que *MN*, *mn*, ce canal se trouvera composé de deux branches *BMA*, *BNA* qui auront chacune le même nombre de cylindres *Mm*, *Nn*; mais la force de la gravite étant la

meme en *M* qu'en *N* par l'hypothèse, et le cylindre *Mm* ayant la même hauteur que son correspondant *Nn*, il

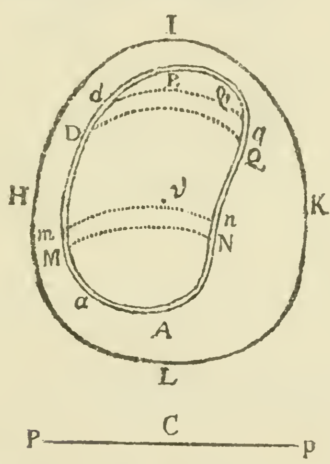


s'ensuit que leurs poids seront égaux. Donc les deux branches entières *BMA*, *BNA* auront aussi le même poids: donc le canal *MBNA* sera en équilibre. Ainsi on n'aura qu'à déterminer la surface *PEpe* du sphéroïde par l'un des principes ordinairement employés, et l'on sera sûr que l'intérieur du sphéroïde sera dans un repos parfait.

§ X.

Lorsqu'il y a plusieurs centres de tèndance.

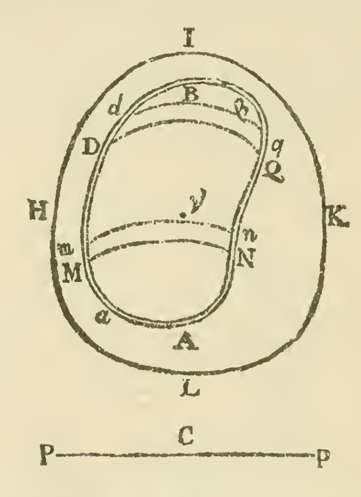
Supposons, par exemple, avec M. de Maupertuis (*), qu'un torrent de fluide tourne autour d'un axe *Pp*, et que chaque particule de ce torrent soit poussée par deux forces ; l'une tendante au centre



C placé hors du torrent, l'autre au

(*) Voyez l'ingenieuse explication que M. de Maupertuis a donnée de la formation de l'Anneau de Saturne. Figure des Astres pag 126 et suiv., seconde édition.

centre γ placé dans l'intérieur, tous les deux dans le plan du méridien. On va voir que si le méridien *HIKL* de la figure annulaire que doit prendre ce torrent, a été déterminé par l'un des prin-



cipes ordinaires, toutes les parties du fluide seront en équilibre.

Pour en être convaincu, il faut se rappeler (§ VIII) què l'équilibre général d'une planete a été reduit à l'équilibre d'un canal quelconque rentrant en lui-même, et placé dans le plan du méridien. Soit donc *BDMANQ* un

canal quelconque de cette nature, par le § précédent, si on partage ce canal en une infinité d'élémens, tels que *Mm*, *Nn*, par des cercles décrits du centre *C*, on aura deux branches *BNA*, *BMA* qui contiendront le même nombre de ces élémens, et dont les efforts provenant seulement de la force vers *C* seront les mêmes. Ensuite si on partage le même canal en une infinité d'autres élémens, *Dd*, *Qq* par des arcs de cercles *DQ*, *dq* décrits du centre γ; on aura encore les deux branches $\beta D\alpha$, $\beta Q\alpha$ contenant le même nombre d'élémens, et qui étant animées de la force qui pousse vers γ, se contrebalanceront encore : donc le canal *BDMANQ* sera en équilibre en vertu des deux forces, comme il le serait par une seule. Donc, § VIII, le fluide entier ou la planète annulaire sera en équilibre dans toutes ses parties.

Si au lieu de supposer dans chaque méridien deux centres de forces, on en supposait un nombre quelconque, on voit bien qu'il ne faudrait pas d'autre

démonstration pour faire voir l'équilibre général des sphéroïdes, ou des anneaux qui se formeraient dans ces cas.

§ XI.

Lorsque la gravité est produite par l'attraction d'un corps central de figure quelconque.

Dans le § précédent, on a supposé, ainsi que dans la détermination des anneaux qu'a donnée M. de Maupertuis, que chaque centre n'agissait que dans le plan du méridien où il était placé. Si on voulait cependant que la gravité de chaque particule fût le résultat des attractions en tout sens, de toutes les parties du cercle qui sert, pour ainsi dire, de centre à l'anneau, il serait aisé de démontrer l'équilibre des parties de l'anneau. Car représentons-nous dans l'intérieur de l'anneau un canal quelconque rentrant en lui-même à double ou à simple courbure; il est évident par l'argument du § IX, que chaque parti-

cule du cercle attractif exercera sur ce canal des efforts qui se contrebalanceront. Donc les efforts du cercle entier sur le fluide de l'anneau se contrebalanceront aussi; donc le fluide total sera en équilibre.

Quant à la détermination de la figure de l'anneau, pour la trouver dans cette hypothèse, il faudrait commencer par calculer la somme de toutes les attractions des parties d'un cercle sur un corpuscule placé hors de lui, problème qui ne dépend que des quadratures; le reste serait facile par le principe de M. Huygens.

Il ne serait pas plus difficile de s'assurer de l'équilibre d'un sphéroïde ou d'un anneau, si la pesanteur dépendait de l'attraction de toutes les parties d'un noyau solide qui aurait ou la forme d'un sphéroïde, ou celle d'un anneau.

Et la détermination du sphéroïde ou de l'anneau, dans cette hypothèse, ne dépendrait encore que des quadratures.

§ XII

Lorsque la pesanteur vient de l'attraction générale de toutes les parties de la planète.

Si on suppose, comme on le doit faire dans le système de l'attraction, que la pesanteur en chaque point de la planète, soit causée non-seulement par l'attraction de toutes les parties du noyau, mais encore par celle du fluide même qui l'environne, la détermination de la figure du sphéroïde est infiniment plus difficile, parcequ'alors la loi de la gravite dépend de la courbe qu'on cherche, mais le problème, pour être difficile, n'en est pas moins possible; car on voit clairement, ce me semble, qu'il existe une courbe telle que l'attraction du solide qu'elle forme, jointe à celle du noyau, produit vers la superficie une gravité qui, combinée avec la force centrifuge, donne pour force composée, une force dont la direction est perpendiculaire à la surface : prenant donc cette

courbe pour donnée, alors par la même raison qu'on voit la possibilité d'un équilibre parfait dans le sphéroïde où la pesanteur est produite par la seule attraction d'un noyau de figure donnée ; on verra aussi la possibilité, ou plutôt la nécessité de l'équilibre dans le sphéroïde, où le fluide terminé par cette courbe regardée comme connue, attire ainsi que le noyau.

Et on reconnaîtrait facilement la possibilité d'un anneau dans la même hypothèse.

On voit de même que s'il n'y avait point de noyau, mais que la gravité fût produite par l'attraction d'une masse fluide homogène, il y aurait toujours un sphéroïde parfaitement en équilibre, et qu'il suffirait pour le déterminer, de se servir du principe de M. Huygens, ou de celui de M. Newton, ou bien encore de l'équilibre de canaux à qui on donnerait la forme qu'on voudrait, pourvu qu'ils aboutissent à deux points quelconques de la surface.

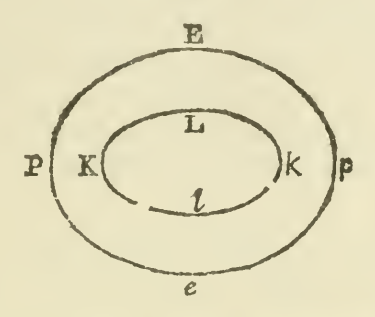
Si on supposait que le noyau solide dont nous parlions tout-à-l'heure, fût composé de couches de différentes densités, on voit encore que le sphéroïde dont la surface serait déterminée à l'ordinaire, aurait toutes ses parties dans un parfait équilibre.

§ XIII.

Manière d'expliquer dans le système de l'attraction l'équilibre d'une planète, dont la figure serait supposée à volonté.

Dans ce système, si on ne suppose pas toutes les parties d'une planète homogènes, mais qu'on imagine qu'elle ait un noyau solide de telle densité et de telle forme qu'on voudra, il est bien aisé de voir qu'on pourra donner à cette planète une forme quelconque aplatie ou alongée ; car on sent bien qu'on peut trouver un sphéroïde *KLkl*, tel que son attraction étant ajoutée à celle de la matière renfermée entre le sphéroïde donné *PEpe*, et le sphéroïde cherché *KLkl*, produise, après avoir eu égard à la force centrifuge, une force dont la

direction soit perpendiculaire à la surface *PEpe*; et la courbe *KLkl* étant



regardée comme connue, on sait par ce qui précède, que toutes les parties du fluide qu'elle termine, seront en équilibre.

On n'aurait pas pu se contenter de ce raisonnement, même avant les mesures du nord, pour expliquer comment la Terre aurait pu avoir une forme quelconque, alongée, par exemple; car dans la recherche de la figure de la Terre, il y a une attention à avoir, qui est inutile pour les autres planètes : c'est que la loi suivant laquelle on suppose qu'agit la gravité, doit s'accorder avec les observations qui nous ont appris que le

pendule qui bat les secondes, devait être raccourci en allant du nord au sud; or la démonstration précédente n'ayant point d'égard à ce raccourcissement du pendule, il faut savoir ce que cette circonstance ajoute de plus à la question: c'est ce que nous ferons dans le chapitre III de la seconde Partie.

CHAPITRE III.

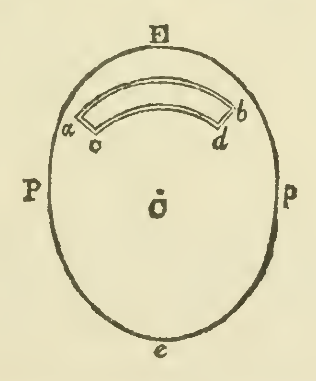
Examen d'une loi de pesanteur dans laquelle une planète n'arriverait jamais à une forme constante, quoique les deux principes ordinairement employés s'accordassent a donner la même figure au sphéroïde.

§ XIV.

Après avoir parcouru tant d'hypothèses, où il est toujours possible qu'il se forme une planète qui conserve constamment sa figure, montrons-en une où il y aurait un mouvement perpétuel dans les parties du fluide. Reprenons, par exemple, l'hypothèse où la

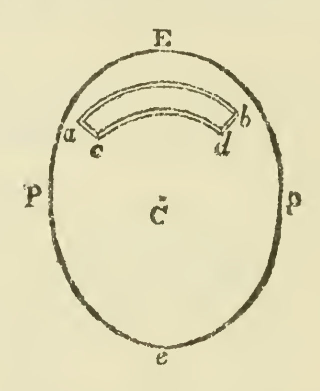
force de la gravité est dirigee vers un centre; mais supposons qu'au lieu de dépendre simplement de la distance à ce centre, elle dépende encore de quelqu'autre quantité, comme de l'angle que le rayon fait avec l'axe, etc. Nous allons voir que les fluides ne seraient jamais en équilibre dans cette hypothèse.

Car soit conçu dans le sphéroïde *PEpe* un canal *abdc* composé de deux



arcs de cercle, dont le centre *C* soit le point vers lequel pousse la gravité, et de deux petits cylindres *ac*, *bd* dirigés

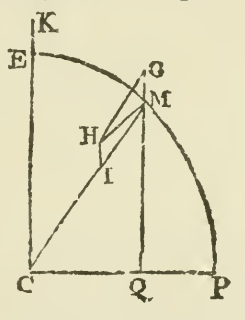
vers le centre, il est évident que la gravité ne fera aucun effet dans les deux branches circulaires, puisque sa direction sera partout perpendiculaire à celle de ces branches. Donc pour qu'il y eût équilibre, il faudrait que les efforts des deux petits cylindres *ac*, *bd* fussent les



mêmes; or cette condition demanderait que la pesanteur en *a* fût la même qu'en *b*, ce qui est contre l'hypothèse, puisqu'elle ne doit pas être la même a la même distance. Donc dans toutes les hypotheses où la gravite tendra vers un centre sans dépendre uniquement de la distance à ce centre, il ne pourra jamais y avoir de fluide en equilibre.

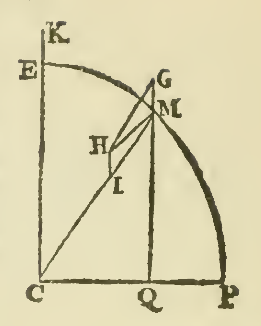
§ XV.

Voyons présentement si dans ces hypothèses, les deux principes ordinaires, c'est-à-dire l'équilibre des colonnes, et la perpendicularité de la pesanteur à la surface, ne pourraient pas s'accorder à donner la même figure au sphéroïde; soient *PME* un sphéroïde pris à volonté, *C* son centre, *P* le pôle, etc.; *EK* une ligne exprimant la force centrifuge en *E* : en prenant *MG* à *EK*, comme l'ordonnée *QM* au rayon de l'équateur *CE*, *MG* exprimera la force centrifuge en *M* puisque toutes les parties tournent dans le même temps.



Cela posé, qu'on tire le rayon *MC*, et la perpendiculaire *MH* à la courbe en *M*, qu'on mène ensuite *GH* parallèle à *MC*, et que du point *H* où cette droite rencontre *MH*, on tire *HI* parallèle

à *MG*; il est certain que *MI* exprimera la force centrale qui doit être en *M*, pour que le principe de M. Huygens soit observé dans le sphéroïde *PME*.



Si on voulait présentement que la pesanteur vers le centre ne dépendît que de la distance, la relation entre la gravité et la distance serait donnée, puisque cette relation serait celle qu'il y aurait entre *MI* et *MC*. Mais si on veut que la pesanteur ne dépende pas simplement de la distance, qu'elle dépende encore de l'angle *MCP*, ou de toute autre quantité; il est clair qu'on pourra varier d'une infinité de manières la loi de la gravité de *C* en *M*, et conserver cependant le même poids dans la colonne *CM*. Cependant on vient de voir dans le § précédent, qu'il ne pouvait jamais y avoir d'équilibre dans les parties d'un fluide, lorsque la gravité poussant vers un centre, dépendait d'autres quantités que de la

distance à ce centre. Voilà donc une infinité de cas où l'accord des deux principes ordinaires n'assure rien, ce qui montre qu'on avait besoin d'un principe aussi général que celui du chapitre premier.

CHAPITRE IV.

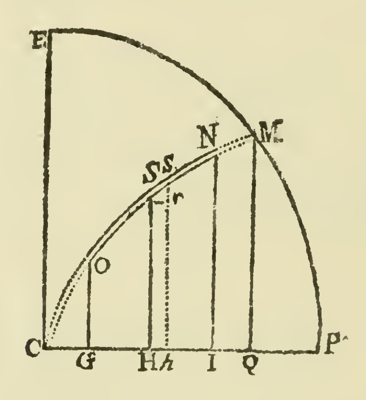
Manière générale de faire usage du principe de l'équilibre des canaux de figure quelconque.

§ XVI.

La loi suivant laquelle la gravité agit sur toutes les parties d'une masse fluide qui tourne autour de son axe étant donnée, trouver si cette masse peut avoir une forme qu'elle garde constamment.

On sait par le § VIII, qu'afin qu'une masse de fluide puisse prendre une forme constante, il faut qu'un canal quelconque rentrant en lui-même, et placé dans le plan du méridien, soit en équi-

libre indépendamment de la force centrifuge, ou, ce qui revient au même, il faut qu'en calculant la somme des efforts de la gravité sur un canal quelconque *ON*, on ait la même quantité que si on avait pris tout autre canal, qui passerait par les mêmes points *O*, *N*.



Pour employer ce principe, on prendra à volonté dans le canal *ON*, deux points infiniment proches *S* *s*, et on abaissera de ces points à l'axe *CP* les perpendiculaires *SH*, *sh*; on mènera *Sr* parallèle à l'axe, et l'on imaginera que la force de la gravité en chaque point *S* ait été décomposée en deux

autres forces, dont l'une agisse perpendiculairement à l'axe CP, et l'autre parallèlement au même axe :

on fera ensuite........... $CH = x$

$HS = y$

$Sr = dx$

$sr = dy$

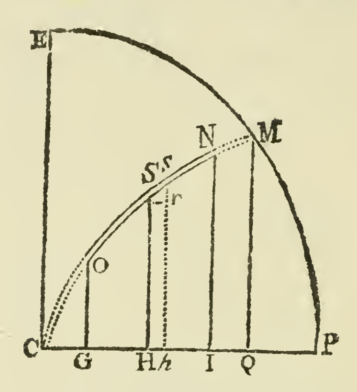
la force perpendiculaire à CP... $= P$

la force parallèle à CP......... $= Q$.

Cela fait, on cherchera l'effort que la force P fera faire au cylindre Ss pour sortir vers O, et on trouvera facilement que l'expression de cet effort sera Pdy; car la force P agissant suivant SH, la partie de cette force qui agira dans la direction du canal Ss sera $\frac{P \times rs}{Ss}$; or multipliant cette quantité par la masse, on aura $P \times sr$ ou Pdy.

On cherchera ensuite l'effort que la force Q fera faire au cylindre Ss vers le même côté O, et l'on aura de la même manière Qdx pour la valeur de cet effort. Donc $Pdy + Qdx$ sera l'effort total du petit cylindre Ss en vertu des deux forces, ou, ce qui revient au

même, en vertu de la gravité qui avait été décomposée en ces deux forces.



Si on voulait présentement faire usage de cette quantité, pour trouver en termes finis la valeur du poids du canal *ON*, en supposant que la courbure de ce canal fût donnée par une équation entre x et y, on commencerait par faire évanouir y et dy de $Pdy + Qdx$; cette différentielle n'ayant plus que des x et des dx, on l'intégrerait en observant de compléter l'intégrale, c'est-à-dire d'ajouter la constante nécessaire, afin que le poids fût nul, lorsque x serait égal à CG; on ferait ensuite $x = CI$, et l'on aurait le poids total de *ON*. Mais

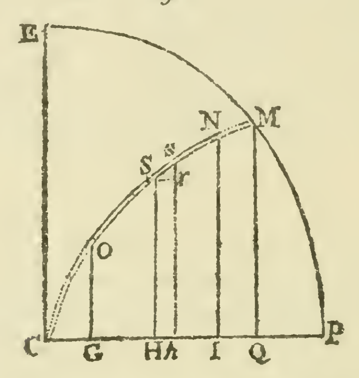
comme l'équilibre du fluide demande que le poids de ON ne dépende pas de la courbure de OSN, c'est-à-dire de la valeur particulière de y en x, il faut donc que $Pdy + Qdx$ puisse s'intégrer sans connaître la valeur de x, c'est-à-dire qu'*il faut que* Pdy + Qdx *soit une différentielle complète* (*), *afin qu'il puisse y avoir équilibre dans le fluide.*

§ XVII.

Lorsque les expressions des forces P et Q seront assez composées pour qu'on ne reconnaisse pas facilement si $Pdy + Qdx$ est une différentielle com-

(*) J'entends par différentielle complète, une quantité qui a pour intégrale une fonction de x et de y. $ydx + xdy$, $\frac{ydx + xdy}{2\sqrt{(aa + xy)}}$ sont des différentielles complètes, parce qu'elles ont pour intégrales xy, $\sqrt{(aa+xy)}$. $\frac{xdy - ydx}{xx+yy}$ est aussi une différentielle complète, parce que son intégrale est représentée par l'arc dont la tangente est $\frac{y}{x}$, le rayon étant 1. Mais $y^3dx + x^2dy$, $yydx + xxdy$, ne sont pas des différentielles complètes, parce qu'aucunes fonctions de x et de y n'en sauraient être les intégrales.

plète, il faudra se servir du théorème que j'ai donné dans mon Mémoire (*) sur le Calcul intégral, c'est-a-dire qu'il faudra voir si $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ (**). Toutes les fois



que cette équation aura lieu, on sera sûr qu'il y aura équilibre dans le fluide.

§ XVIII.

Les mêmes choses étant posées que dans le problème précédent, trouver

(*) Voyez les Mémoires de l'Académie, année 1740, page 294.

(**) On entend par $\frac{dP}{dx}$ la différentielle de la fonction P, prise en supposant x seulement variable, et dont on a ôté les dx.

l'équation qui exprime le méridien de la masse fluide.

Supposons que CH, x et SH, y, deviennent les coordonnées CQ, et QM du méridien EMP du sphéroïde, il est clair que l'intégrale de $Pdy + Qdx$, complétée de manière qu'elle devienne zéro, lorsque x et y sont zéro, exprimera le poids d'une colonne ou canal quelconque CM qui irait du centre C à la superficie. Il faudra donc que cette intégrale moins la somme des efforts de la force centrifuge sur toutes les parties de la colonne CM, soit une quantité constante. Mais, § V, la somme des efforts centrifuges de CM, est la même que celle de la colonne QM: donc en nommant f la force centrifuge à une distance de l'axe exprimée par r, on aura $\frac{fyy}{2r}$ pour la somme des efforts centrifuges de la colonne CM, et par conséquent l'*équation générale du méridien du sphéroïde* sera

$$\int(Pdy + Qdx) - \frac{fyy}{2r} = A.$$

CHAPITRE V.

Principe général dont l'observation est aussi nécessaire dans les fluides, que l'équilibre des canaux quelconques, avec l'usage de ce nouveau principe pour déterminer les mêmes choses que par le premier.

§ XIX.

J'APPELLERAI *courbe de niveau*, une courbe dans tous les points de laquelle la tangente est perpendiculaire à la direction de la pesanteur ; il en sera de même d'*une surface courbe de niveau.*

§ XX.

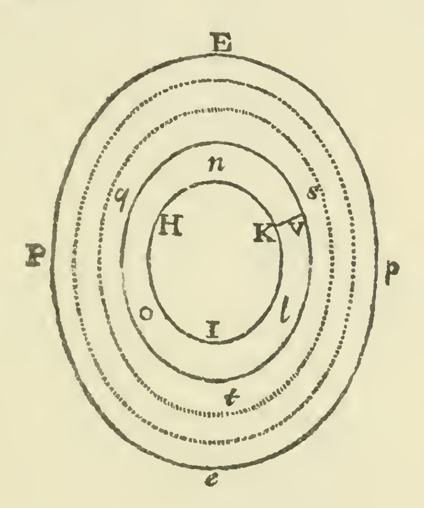
Par *couche de niveau*, j'entendrai l'espace renfermé entre deux surfaces courbes de niveau.

§ XXI.

PRINCIPE GÉNÉRAL.

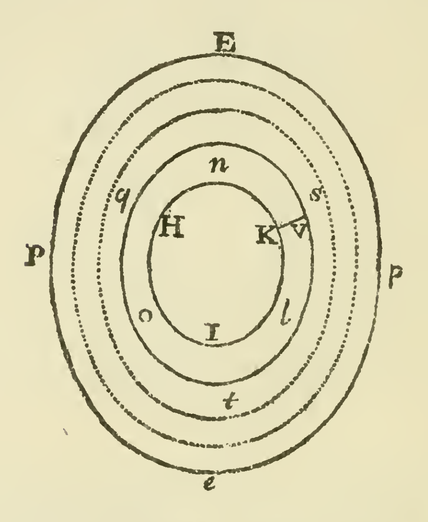
Une masse de fluide EPep, *qu'on imagine partagée en une infinité de couches de niveau, sera en équilibre, si en chaque*

point K *d'une de ces couches quelconques, l'épaisseur* KV *de la couche est en raison renversée de la pesanteur au même point* K.



Supposons d'abord que la masse de fluide *HKI* soit la seule, et qu'elle soit en équilibre ; il est clair par les premiers principes de l'Hydrostatique, que si on presse tous les points de sa surface avec une force égale, l'équilibre n'en sera point troublé. Or si on vient à mettre sur la masse *HKI* la couche *onl* in-

finiment mince, et composée d'une infinité de petits cylindres, dont les hauteurs soient en raison renversée des forces de la pesanteur: la pression causée par ces petits cylindres sera la même,

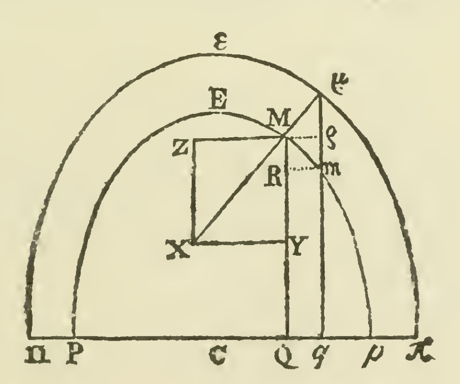


et par l'hypothèse, la surface de la couche *onl* sera de niveau. Donc la masse *onl* sera en équilibre aussi bien que la masse *HKI*, remettant ensuite continuellement d'autres couches *qst*, etc., dans lesquelles on observe les mêmes conditions par rapport à l'épaisseur

qu'elles ont dans chacun de leurs points, on verra que l'équilibre de toute la masse *EPep* ne dépendra que de l'équilibre de la première masse *HKI*; mais comme la masse *HKI* a été prise à volonté, on peut la supposer si petite, qu'elle ne soit plus qu'une particule infiniment petite, qui ne peut pas manquer d'être en équilibre: donc, etc.

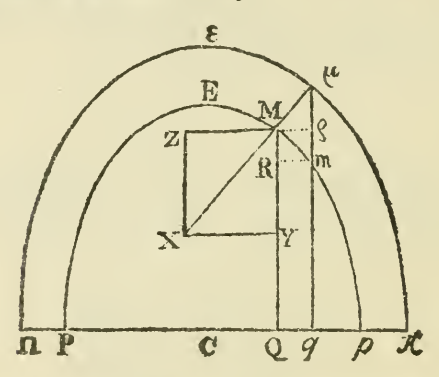
§ XXII.

Supposant que chaque point M *d'une courbe de niveau* PEp *soit poussé par*



deux forces, dont l'une MY *agisse perpendiculairement à l'axe* Pp, *et l'autre*

MZ *parallèlement à la même ligne :* *trouver la relation qui doit être entre ces deux forces, afin que la force composée ou la pesanteur* MX *qui en résulte, soit en raison renversée de l'épaisseur* Mμ *de la couche de niveau infiniment mince* $\pi\varepsilon\Pi$PEp.



Ayant abaissé de μ la perpendiculaire μq à l'axe Pp, et mené par le point m la parallèle mR au même axe, on nommera

la force MY. . . . . R
MZ. . . . . Q
CQ. x
QM. . . . . y,

d'où l'on aura

$$Qq = Rm = dx\,,$$
$$MR = \quad -dy\,;$$

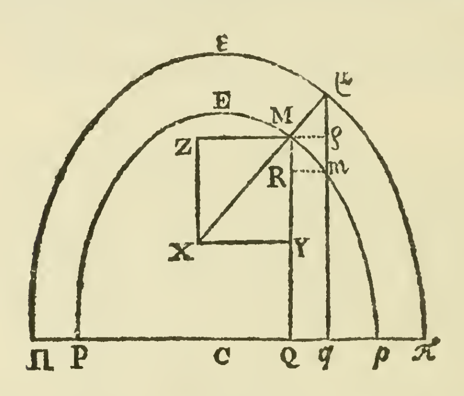
et comme la force MX par les conditions du problème doit être perpendiculaire à Mm, les triangles MXY, MRm seront semblables, ce qui donnera la proportion $Q : R = -dy : dx$, d'où l'on tirera l'equation générale

$$Rdy + Qdx = 0\,,$$

qui sous cette forme appartiendra également à toutes les courbes de niveau, mais qui étant intégrée exprimera, suivant la constante qu'on aura ajoutée, celle des courbes de niveau qu'on voudra.

Supposons maintenant, qu'on eût en effet intégré l'équation $Rdy + Qdx = 0$, et que par l'addition de la constante a, on eût l'équation en termes finis de la courbe PEp; de plus, qu'on eût formé l'équation de la courbe $\Pi\varepsilon\pi$, en mettant dans l'équation intégrée $a + da$ à la place de a. Il est évident qu'on pourrait par ces deux équations, trouver la valeur de l'épaisseur $M\mu$ de la couche

en M ; or cette valeur trouvée, il n'y aurait plus qu'a la multiplier par la force MX, et en faire le produit proportionnel à da, puisque ce produit serait le poids de $M\mu$, et que ce poids doit être constant par les conditions du problème.



Mais sans intégrer réellement l'équation $Rdy + Qdx = 0$, on va voir qu'on peut, en examinant les opérations qu'on devrait faire pour l'intégrer, trouver la relation entre R et Q, qu'indique cette proportionnalité qui doit être entre le poids de $M\mu$ et da.

Pour cela, imaginons que ω soit la quantité qui, multipliant tous les termes

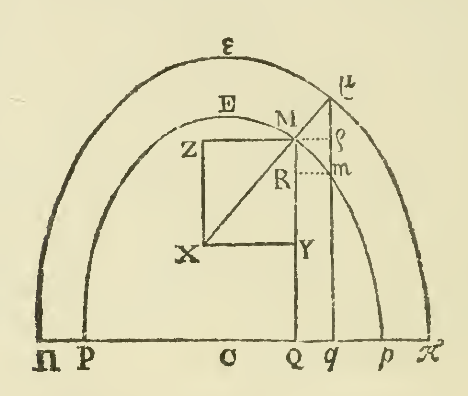
de $Rdy + Qdx$, la rendrait une différentielle complète.

Il est clair que l'intégrale de $\omega Rdy + \omega Qdx$ égalée à une constante a, serait l'équation de la courbe PEp, en supposant que a fût la constante ou paramètre de la courbe PEp; et que la même intégrale égalée à $a + da$, donnerait l'équation de la courbe $\Pi\varepsilon\pi$; mais pour pouvoir tirer de ces deux équations la valeur de $M\mu$, ou simplement de $M\rho$, il est évident qu'il faudrait que dans la première de ces deux équations, x et y représentassent CQ et QM, pendant que dans la seconde ils exprimeraient Cq et $q\mu$.

Supposons donc que ces deux équations entre CQ et QM, et entre Cq et $q\mu$, fussent retranchées l'une de l'autre ; il est clair que l'équation qui en viendrait serait $\omega Rdy + \omega Qdx = da$, en supposant que dy ne fût plus comme dans le calcul précédent MR, mais $\mu\rho$ différence de MQ à μq.

Si on se rappelle ensuite que μM épaisseur de la couche en M, doit être

perpendiculaire à Mm, et par conséquent le prolongement de MX ; on aura les triangles semblables $M\mu\rho$, MXY qui donneront $\mu\rho = \frac{Rdx}{Q}$.



Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on aura $\frac{\omega RR}{Q}dx + \omega Q dx = da$, d'où l'on tirera $dx = \frac{da}{\omega}\left(\frac{Q}{RR+QQ}\right)$, et par conséquent $M\mu = \frac{da}{\omega\sqrt{(RR+QQ)}}$, à cause que les triangles semblables $M\mu\rho$, MXY donnent $XY : XM = M\rho : M\mu$.

Si on multiplie présentement cette valeur $M\mu$ par la force MX, afin d'avoir le poids de $M\mu$, on aura $\frac{da}{\varphi}$ pour la valeur de ce poids. Mais nous avons dit tout-à-l'heure, que ce poids devait être proportionnel à da : donc ω est constant. Donc la différentielle $Rdy + Qdx$ n'a pas besoin de facteur pour être complète, c'est-à-dire qu'il *faut que* Rdy + Qdx *soit la différentielle de quelque fonction de* x *et de* y, *afin que la pression de la couche soit égale en tous ses points, et par conséquent, afin que le sphéroïde soit en équilibre.*

§ XXIII.

Il est clair, que *lorsque* Rdy + Qdx *sera une différentielle complète, son intégrale égalée à une constante sera l'équation du sphéroïde*, puisque la surface du sphéroïde doit être elle-même une surface courbe de niveau.

§ XXIV.

Si on veut comparer cette équation gé-

nérale avec celle que nous avons trouvée dans le chapitre précédent, il faut remarquer que *R* tient ici lieu de $P - \frac{fy}{r}$; car *P* exprimant, § XVI, la partie de la gravité ou de la pesanteur primitive qui agit perpendiculairement à l'axe, il faut en retrancher $\frac{fy}{r}$, c'est-à-dire la force centrifuge, afin d'avoir *R*.

Quant à *Q*, c'est-à-dire à la force qui agit parallélement à l'axe, on voit bien qu'il doit venir pour cette quantité la même chose, soit qu'on décompose la pesanteur primitive, ou qu'on décompose la pesanteur actuelle.

§ XXV.

Liaison nécessaire entre les principes exposés aux § VIII *et* XXI.

Il est aisé de voir, indépendamment du calcul qu'on vient de donner, que le principe employé dans les chapitres précédens, c'est-à-dire l'équilibre des canaux quelconques, ne saurait jamais donner un autre résultat, que le principe de

l'égalité de pression des couches, dont nous venons de faire usage. Car on n'a qu'a prendre pour le canal rentrant en lui-même, l'assemblage de deux branches courbes qui soient deux parties quelconques de deux courbes de niveau voisines, et de deux branches rectilignes perpendiculaires à ces deux courbes, et l'on verra que la liqueur contenue dans les deux branches courbes, ne pesant point à cause du niveau de ces deux branches, il faudra que les deux branches rectilignes soient d'un poids égal, afin que le canal entier soit en équilibre; d'ou il suit que l'épaisseur de la couche doit être en raison renversée de la force de la pesanteur.

CHAPITRE VI.

Application de la formule trouvée par les deux principes précédens à plusieurs hypothèses particulières.

§ XXVI.

Lorsque les forces qui poussent vers les deux axes ne dépendent que des distances à ces axes.

Dans tous les cas de cette nature, il est facile de voir que la masse de fluide pourra conserver une forme constante. Si la force qui pousse perpendiculairement à l'axe des x est nommée Y, et que celle qui pousse perpendiculairement à l'axe des y soit appelée X,

$$\int X dx + \int Y dy - \frac{fyy}{2r} = A$$

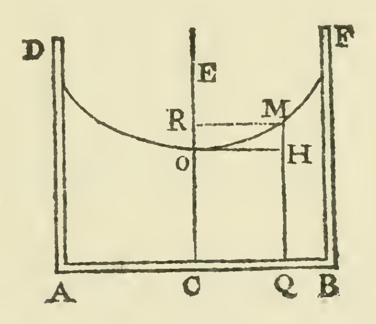
sera l'équation du méridien dans cette hypothèse.

§ XXVII.

Quoique le problème suivant n'appartienne pas directement au sujet que j'ai en-

trepris de traiter dans cet ouvrage, la manière de le résoudre se tire si aisément de ce qui précède, que j'ai cru qu'on me pardonnerait la petite digression que je vais faire.

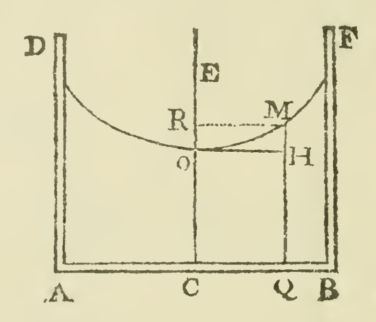
Trouver la courbure OM *que prend la surface de l'eau renfermée dans un vase cylindrique que l'on fait tourner autour de l'axe* CE.



Je remarque d'abord que chaque particule de l'eau est animée de deux forces; l'une constante et verticale est la pesanteur, l'autre variable et horizontale est la force centrifuge qui dépend de la vitesse des parties comparée aux circonférences qu'elles décrivent.

De là, je conclus que la vîtesse des parties étant supposée se conserver, la masse fluide aura toutes ses parties en équilibre, et gardera une forme constante.

Pour trouver ensuite l'équation de la courbe *OM* dont la révolution donne



la surface de l'eau, supposons, pour plus grande généralité, que la vîtesse des parties qui sont à la distance x de l'axe soit représentée par X fonction quelconque de x; la force centrifuge sera par conséquent $\frac{X^2}{x}$, et cette quantité précédée du signe —, exprimera la force que nous avons appelée précédemment Q. Je mets le signe — à cause que

la force Q avait été supposée agir vers l'axe CE.

Quant à la force qui poussait vers BA, comme elle est présentement la pesanteur, nous mettrons simplement une constante p, nous aurons ainsi l'équation $-\frac{X^2 dx}{x} + pdy = 0$, ou

$$dy = \frac{X^2 dx}{px}$$

pour l'équation demandée de la courbe OM.

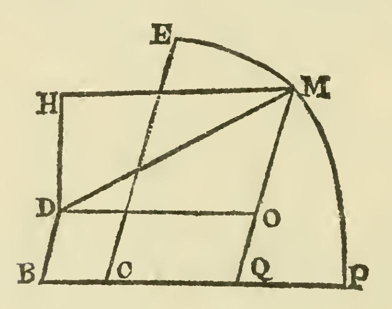
Si on prend la peine de comparer cette solution avec celle (*) du célèbre M. Daniel Bernoulli, on trouvera qu'elles s'accordent. Quant à la solution de M. Herman (**), il n'en est pas de même; mais je crois qu'on peut prouver facilement qu'il s'est trompé, car il égale le poids d'une colonne d'eau MH qui est l'excédant de la colonne MQ par-dessus le niveau, à la force centrifuge en H, au lieu que c'est à la somme des forces centrifuges de HO qu'il faut égaler ce poids.

(*) Pages 244 et 245 de l'Hydrodynamique.

(**) Page 372 de la Phoronomie.

§ XXVIII.

Equation générale des sphéroïdes, lorsque la gravité est composée de l'attraction de tant de centres qu'on voudra.



Soient *CP* l'axe de révolution, *EMP* un des méridiens, *M* un point quelconque de ce méridien, *H* un des centres attractifs qu'on suppose, pour plus grande généralité, placé hors du plan du méridien ; *HD* la perpendiculaire abaissée de ce centre sur le plan *DBCPME* du méridien, *DB* la perpendiculaire menée de *D* sur l'axe *BCP*, *CQ* et *QM* les coordonnées de la courbe *EMP* qui répondent au point *M*.

Soient de plus $CQ = x$,
$QM = y$.

L'attraction de M vers $H = \pi (HM)^n$,
la force centrifuge à la distance $r \ldots = f$,
$CB = a$,
$DB = b$,
$DH = c$,

on aura pour la partie de la force de H qui agit suivant la direction MQ,

$$\pi \frac{MO}{MH} (HM)^n,$$

ou, ce qui revient au même, la partie de la force P qui vient du centre H, sera

$$\pi (y - b) [(x + a)^2 + (y - b)^2 + cc]^{\frac{n-1}{2}}$$

De même, la partie de la force de H qui agit parallélement à CP, sera

$$\pi \frac{DO}{MH} (HM)^n,$$

c'est-à-dire que la partie de Q qui vient du centre H, sera

$$\pi (x + a) [(x + a)^2 + (y - b)^2 + cc]^{\frac{n-1}{2}}.$$

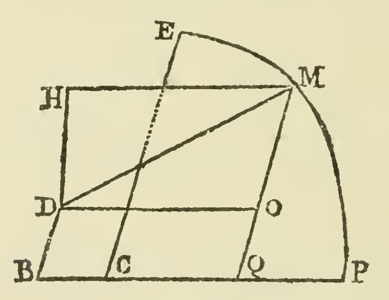
De là il suit que la partie de la quantité $\int (Pdy + Qdx)$ qui vient du centre H,

aura pour valeur

$$\frac{\pi}{n+1}\left[(x+a)^2+(y-b)^2+cc\right]^{\frac{n+1}{2}},$$

ou $$\frac{\pi}{n+1}(HM)^{n+1}.$$

Donc si on imagine autant de centres H, H', H'', etc., qu'on voudra, et que les puissances des distances à ces centres



qui expriment les lois des forces, soient n, n', n'', etc., les intensités étant π, π', π'', etc., on aura

$$\frac{\pi}{n+1}(HM)^{n+1}+\frac{\pi'}{n'+1}(H'M)^{n'+1}$$
$$\frac{\pi''}{n''+1}(H''M)^{n''+1}+\text{etc.}-\frac{fyy}{2r}=A$$

pour l'équation générale du sphéroïde.

Si au lieu de supposer l'attraction des

centres comme une puissance de la distance, on voulait qu'elle fût comme une fonction quelconque; il est clair que le problème serait aussi facile à résoudre.

§ XXIX.

Si on voulait qu'il n'y eût qu'un centre de force, et que ce centre fût placé à l'origine des x, il viendrait

$$\frac{\pi}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}}-\frac{fyy}{2r}=A$$

pour l'équation du sphéroïde dans cette hypothèse.

Cette équation est la même que celle que M. de Maupertuis a donnée dans son Discours de la Figure des Astres, p. 152, deuxième édition.

§ XXX.

Si on supposait deux centres, l'un à l'origine des x, l'autre dans l'axe des y, on aurait

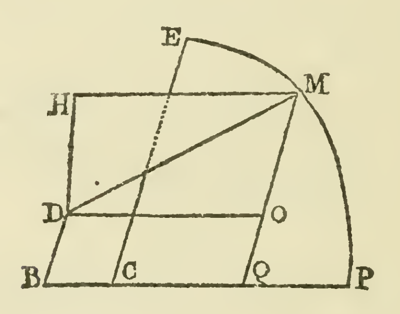
$$\frac{\pi}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}}+$$

$$\frac{\pi'}{n'+1}[xx+(y-b)^2]^{\frac{n'+1}{2}}-\frac{fyy}{2r}=A$$

qui revient au même, que l'équation générale des anneaux donnée par M. de Maupertuis, p. 170 de la figure des Astres.

§ XXXI.

Manière d'avoir l'équation du sphéroïde, lorsque la pesanteur est produite par l'attraction d'un noyau central de figure donnée, et d'une densité uniforme.



Dans cette hypothèse, il faudra trouver par les quadratures la somme de toutes les quantités telles que $\frac{\pi}{n+1}(HM)^{n+1}$, ou, ce qui revient au même, la somme de toutes les particules de matière du

noyau donné, multipliées chacune par la puissance $n+1$ de leur distance au point M, appelant cette quantité Z,

$$Z - \frac{fyy}{2r} = A.$$

sera l'équation du sphéroïde.

On trouverait de même l'équation du sphéroïde, si le noyau était composé de couches de différentes densités.

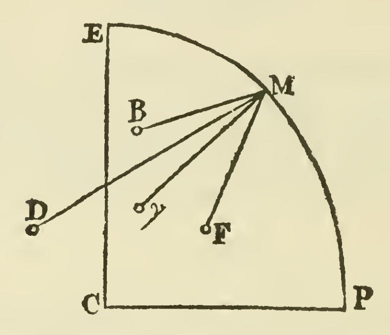
§ XXXII.

Si les parties d'une planète fluide qui tourne autour d'un axe s'attirent mutuellement en raison directe de la simple distance, la figure de cette planète sera celle d'un sphéroïde elliptique.

On pourrait sans un grand calcul tirer la démonstration de cette proposition du § XXVIII; mais pour une plus grande simplicité, on s'y prendra de la manière suivante.

On remarquera d'abord, que si un nombre de corps quelconques B, D, F, etc., attirent un corpuscule M en

raison directe de leurs masses et de leurs distances à ce point M, on pourra substituer à l'attraction de tous ces corps, celle d'une masse égale à $B+D+F+$ etc.



qui serait placée au centre de gravité γ de tous ces corps, et qui agirait comme la distance au point M.

Cela posé, il est clair qu'on peut supposer toutes les particules du sphéroïde, qui par leur attraction produisent la force de la gravité, réunies au centre C de la planète, et alors le problème n'est plus qu'un cas du § XXIX. Il faut faire $n=1$ dans l'équation générale donnée dans ce paragraphe, et l'on aura

$$\tfrac{1}{2}\pi xx+\tfrac{1}{2}\pi yy-\frac{f}{2r}yy=A,$$

qui donne une ellipse pour le méridien du sphéroïde.

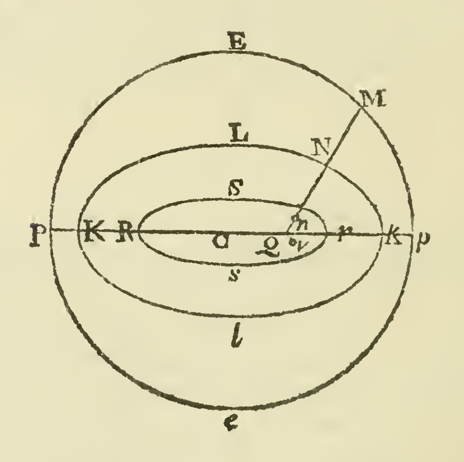
CHAPITRE VII.

Usage du principe de l'équilibre des canaux quelconques dans l'examen des lois de gravité où cette force aurait pour directions les perpendiculaires à une courbe donnée.

§ XXXIII.

Ces hypothèses sont celles que M. Bouguer a choisies dans le Mémoire qu'il a donné à l'Académie, en 1734, intitulé : *Comparaison des deux lois que la Terre et les autres planètes doivent observer dans la figure que la pesanteur leur fait prendre.* Il suppose, la force centrifuge étant mise à part, que tous les graves tendent perpendiculairement à une courbe donnée *KLkl*, et il cherche la loi suivant laquelle la pesanteur doit agir dans les perpendiculaires à cette courbe, afin que le principe de M. Huygens et celui de M. Newton donnent la même

équation, ce qui suffit, suivant lui, pour que le sphéroïde soit en équilibre. Comme par le moyen de ma Théorie on peut déterminer fort simplement tous les cas de ces hypothèses où il peut y avoir équilibre dans les fluides, j'en donnerai ici le détail.



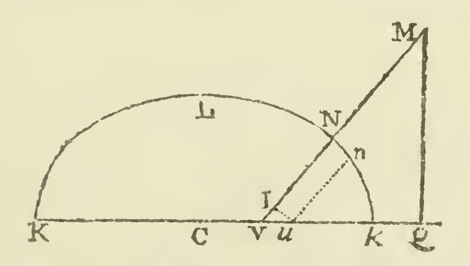
J'observerai d'abord, que pour rendre ces hypothèses naturelles, il faut supposer un noyau solide au-dedans du sphéroïde, qui soit la plus petite *RSrs* des ovales qui ont la même développée que l'ovale *KLkl*. Car si on veut qu'il y ait

du fluide au-dedans de cette ovale, il faudra que ses parties pèsent aussi dans la direction des perpendiculaires *MQ* à la courbe *KLkl*. Soient donc *n* et *v* deux particules de fluide infiniment proches de l'axe, ces deux particules pèseront suivant des directions qui feront ensemble un angle fini, ce qui est choquant.

Mais qu'il y ait du fluide ou non au-dedans de l'ovale *RSrs*, le calcul sera toujours le même, pour savoir si l'équilibre est possible.

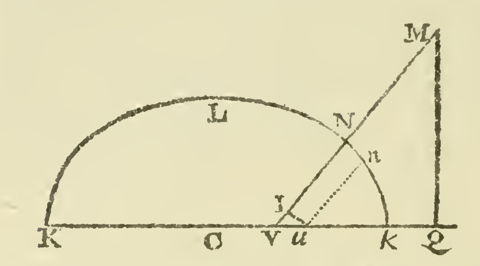
§ XXXIV.

La force de la gravité étant constante, trouver si le fluide peut être en équilibre.



Soit *KLk* la directrice de la gravité, c'est-à-dire la courbe vers laquelle

tous les corps sont poussés perpendiculairement, soit de plus M une particule



quelconque du fluide, et MV la perpendiculaire à la directrice, on fera

$$CQ = x$$
$$QM = y$$
$$CV = z$$

la gravité........ $= p$,

la force vers CQ appelée ci-dessus P, sera

$$\frac{py}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}},$$

la force perpendiculaire à CQ, nommée Q, sera

$$\frac{p(x-z)}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}.$$

Donc il faut que

$$\frac{pydy+p(x-z)dx}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}$$

soit la différentielle de quelque fonction, afin que le sphéroïde puisse être en équilibre. Or c'est ce qui ne paraît d'abord possible, que dans le cas où z est constant; c'est-à-dire, lorsque la gravité agit vers un seul point. Cependant avec un peu d'attention, on découvre facilement l'intégrale de la différentielle précédente, par le moyen de la courbe KLk.

Car si on change cette différentielle en celle-ci:

$$p d\sqrt{[(x-z)^2+yy]}+\frac{p(x-z)dz}{\sqrt{(yy+(x-z)^2)}},$$

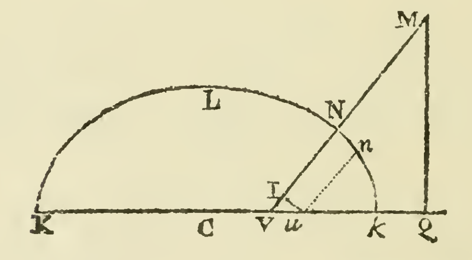
qui lui est égale, on s'apperçoit que la quantité $\frac{x-z}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}$, qui est au second membre, est le sinus de l'angle QMV, on voit ensuite que ce sinus peut s'exprimer par $\frac{IV}{Vu}$, uI étant une perpendiculaire abaissée de u sur MV. Or comme Vu n'est autre chose que dz, la quantité $\frac{(x-z)dz}{\sqrt{(yy+(x-z)^2)}}$ sera donc IV, dont l'intégrale est $-NV+$ une constante A, à cause que CQ augmentant, NV diminue. Donc l'intégrale de la différentielle en-

tière $\frac{p(x-z)dx+pydy}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}$ sera $p(MN)+pA$. Donc, dans cette hypothèse, le sphéroïde peut être en équilibre.

§ XXXV.

Lorsque la pesanteur n'est pas constante, déterminer comment elle doit varier pour qu'il y ait équilibre.

$\frac{(x-z)dx+ydy}{\sqrt{((x-z)^2+yy)}}$ sera toujours la différentielle de NM. Si on nomme donc u



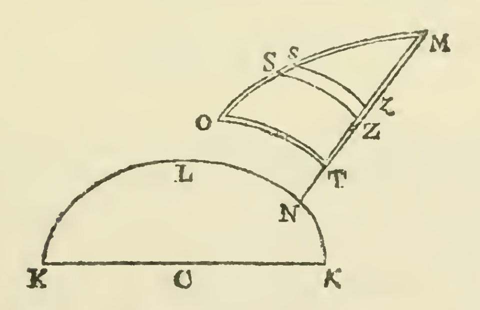
cette droite, et que l'on conserve p pour exprimer la force de la pesanteur, il faudra que pdu soit une différentielle complète, afin qu'il y ait équilibre : mais pour cela, il est évident qu'il faut que p

soit une fonction de u; donc *la pesanteur doit dépendre simplement de la distance à la directrice, pour que le sphéroïde soit en équilibre.*

§ XXXVI.

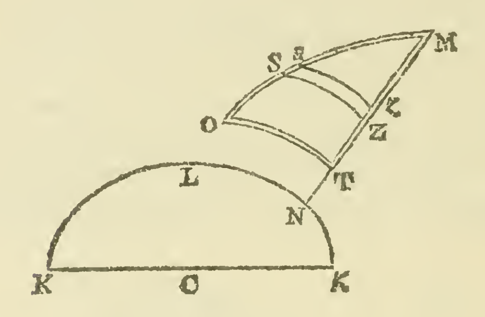
Autre solution des deux problèmes précédens.

Suivant ce qui a été établi dans le § XVI, il faut que la pesanteur d'un canal quelconque *OM* ne dépende uniquement que de la position des points



O, *M*, et nullement de la courbure du canal *OM*; cela posé, soient *MN* une perpendiculaire à la directrice *KLk*, et *OT* une courbe qui a la même développée que *KLk*, il s'agira de prouver

que le poids du canal *OM* est le même que celui du canal *OTM* ; mais le poids de *OT* doit être nul, puisque par l'hypothèse, la pesanteur agit perpendiculairement à la direction de ce canal dans tous ses points. Donc il faut que *OM* et



MT soient en équilibre, ou ce qui revient au même, si on mène les deux courbes quelconques, *SZ*, *sz* infiniment proches l'une de l'autre, et ayant chacune la même développée que *OT*, il faut que le poids *Ss* soit égal à celui de *Zz*. Or ces deux petits cylindres ne sauraient se faire équilibre, que la pesanteur en *S* ne soit égale à celle qui agit en *Z*, c'est-à-dire que cette force ne soit la même à la même distance de la direc-

trice. Donc l'équilibre du sphéroïde demande que la pesanteur soit une fonction de la distance à cette courbe.

§ XXXVII.

De là il suit, que si la pesanteur était le résultat de plusieurs forces qui agissent toutes perpendiculairement à des courbes données, et qui fussent exprimées par des fonctions de la distance à ces courbes, l'équilibre serait encore possible.

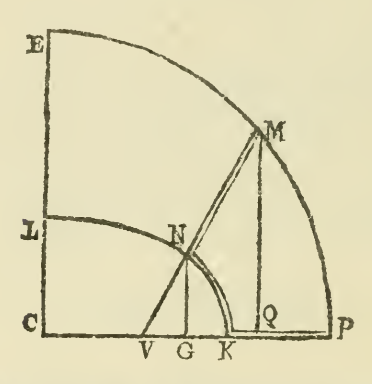
§ XXXVIII.

Trouver l'équation du sphéroïde, lorsque la force de la gravité agit perpendiculairement à une courbe donnée, et est exprimée par une fonction quelconque de la distance à cette courbe.

Soit pris dans une direction perpendiculaire à la courbe donnée, une colonne de fluide MN qui communique avec la colonne KP, répondant au pôle.

par le canal *NK* placé sur la courbe donnée *LNK*.

Il est clair que la gravité ne fera point d'effet dans *KN*, ni la force centrifuge dans *KP*. Donc il faudra que le poids



de *MN* moins la force centrifuge de *MN* + *NK*, ou ce qui revient au même, moins la force centrifuge de *QM* soit constant.

Qu'on abaisse maintenant *NG* perpendiculaire à l'axe, et qu'on fasse

$$GN = z$$
$$VN = s$$
$$NM = t$$

la force de la gravité en $M \ldots = T$,
la force centrifuge à la
distance $r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = f$,

On aura......... $QM = (t+s)\frac{z}{s}$,
la force centrifuge
de $QM \ldots\ldots\ldots = \frac{f}{2r}(t+s)^2 \frac{zz}{ss}$,

le poids de la colonne $MN = \int T dt$.
Donc l'équation du sphéroïde sera

$$\int T dt - \frac{f}{2r}(t+s)^2 \frac{zz}{ss} = A,$$

par laquelle on construira aisément le méridien, s étant donné en z par l'équation de la directrice.

§ XXXIX.

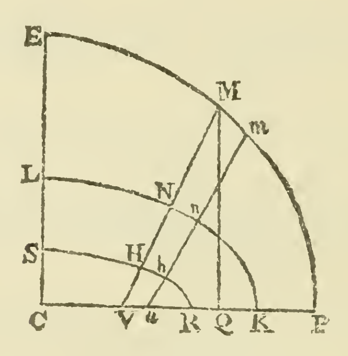
Que la force de la pesanteur soit constante et égale à l'unité, on aura dans ce cas

$$t - \frac{f}{2r}(t+s)^2 \frac{zz}{ss} = A$$

pour l'équation du sphéroïde.

§ XL.

Qu'en se servant du principe de Bouguer, on peut croire d'abord que les lois de gravité qu'on vient de choisir, ne peuvent plus s'accorder avec l'équilibre des fluides.



Si on voulait trouver l'équation du sphéroïde précédent, par la méthode de M. Bouguer, qui consiste à rendre égal le poids des colonnes MV et PV, il y aurait une observation assez délicate à faire, sans laquelle on trouverait une autre équation que par le principe précédent, et par conséquent différente de

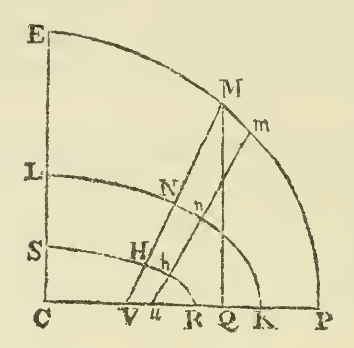
ce que donnerait le principe de M. Huygens. D'où il arriverait qu'une infinité d'hypothèses de gravité sembleraient ne pas s'accorder avec l'équilibre des fluides, quoiqu'elles pussent s'y accorder réellement.

Supposons, par exemple, que la pesanteur soit constante et égale à l'unité: de l'équilibre de *MV* et de *VP*, il paraît s'ensuivre, que le poids *MV*, c'est-à-dire *MV* moins la force centrifuge de *QM* serait égal à *VP*, ce qui donnerait

$$t + s - \frac{f}{2r}(t + s)^2 \frac{zz}{ss} = A + u$$

pour l'équation du sphéroïde, en gardant les mêmes dénominations que dans le problème précédent, et en nommant de plus *KV*, *u*. Or cette équation étant différente de celle qu'on a donnée dans le § précédent, on en conclurait d'abord, que le sphéroïde n'est pas possible. Mais qu'on examine bien ce que demande la loi de gravité qu'on a choisie, on verra qu'il n'est pas permis de supposer le poids de *PV* proportionnel à *PV*, quoique la pesanteur soit constante.

Pour le faire voir, soit *KR* le rayon de la développée de la courbe *KNL*



au point *K* (supposant qu'elle coupe perpendiculairement son axe en *K*) ; la pesanteur de *KR* sera surement exprimée par *KR*, parce que le long de cette ligne on ne peut pas mener d'autre perpendiculaire à la courbe que *KR*. Mais depuis *R* jusqu'en *V*, en *u* par exemple, il est clair que les perpendiculaires *un* à la courbe *KNL*, seront les directions de la pesanteur, pour que l'uniformité soit observée, ou plutôt, pour qu'il n'y ait pas de contradiction dans l'hypothèse. Car on voit bien qu'il serait absurde d'imaginer que *u* pèserait dans la direc-

tion uC en le considérant comme partie de la colonne VP, et qu'il pèserait suivant un lorsqu'il serait supposé dans la colonne uam : or dès qu'on supposera, comme on le doit, que les particules de VR pèsent dans les directions VN, un, etc. perpendiculaires à la courbe LNK, on verra que le poids de VR sera le même que celui de VH, SHR étant une courbe qui a la même développée que LNK. Donc le poids de KV sera NV, et non pas KV. Avec cette attention, on aura pour l'équation du sphéroïde

$$t+s-\frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{zz}{ss}=A+s,$$

ou

$$t-\frac{f}{2r}(t+s)^2\frac{zz}{ss}=A,$$

qui est la même que celle du § précédent.

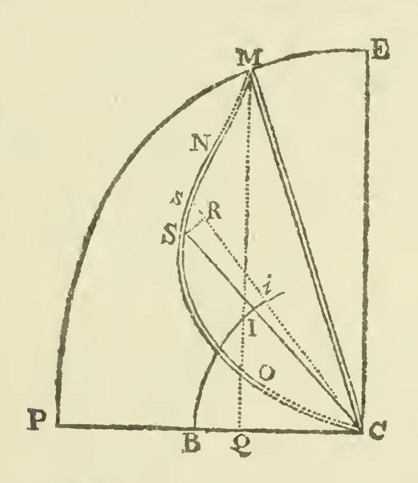
CHAPITRE VIII.

Autres manières d'employer le principe de l'équilibre des canaux quelconques, dans la recherche des figures des Planètes.

J'AI donné dans les chapitres V et VI une méthode générale, pour connaître si une loi quelconque de gravité pouvait convenir à l'équilibre des fluides, mais si cette méthode a l'avantage de la généralité, elle n'a pas toujours celui de la simplicité; on en a vu des exemples dans le chapitre II et dans le précédent, où il a été bien plus commode d'employer la gravité dans sa direction naturelle, que de la décomposer en deux forces perpendiculaires aux deux axes. Voici encore des cas de la même nature, par l'examen desquels on parviendra facilement à trouver la méthode la plus courte qu'on doive suivre dans chaque cas particulier.

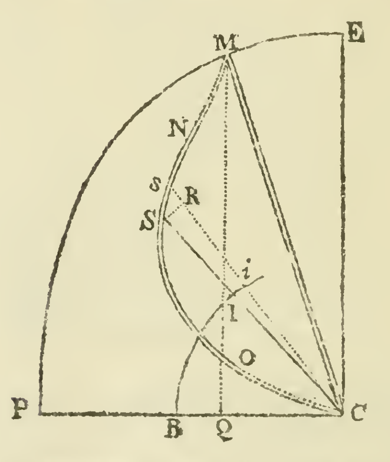
§ XLI.

Trouver les conditions nécessaires pour l'équilibre des fluides, lorsque la pesanteur et sa direction sont données par des quantités composées du rayon, et de l'angle du rayon avec l'axe.



Soient *PE* le sphéroïde, et *NO* un canal quelconque pris dans l'intérieur. Que la force à chaque point *S* soit décomposée en deux autres, l'une vers le centre fixe *C*, l'autre suivant *SR* perpendiculaire à *SC*. Soient de plus

$CB = 1$,
l'arc $BI = x$,
$CS = y$,
$Ii = dx$,
$SR = ydx$,
$sR = dy$,
la force centrale........... $= P$,
celle qui tire perpend. à $CS = Q$.
Le poids du petit cylindre Ss animé par ces deux forces; sera $Pdy + yQdx$,



puisqu'il doit être égal à celui de deux cylindres SR, Rs. Or l'intégrale de cette différentielle doit être une quantité qui ne dépende point de l'équation particu-

lière de la courbe *ON*; donc en se servant des mêmes raisonnemens employes au § XVI, *il faudra que* Pdy + Qydx *soit une différentielle complète, afin que le sphéroïde soit possible*. D'où l'on a la relation qui doit être entre les forces *P* et *Q*.

§ XLII.

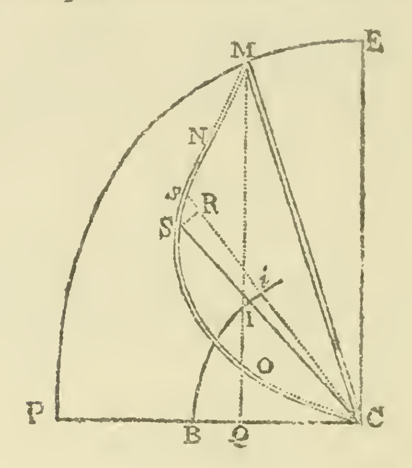
Si on ne reconnaissait pas facilement que $Pdy + Qydx$ fût une différentielle complète, on n'aurait qu'à examiner si $\frac{dP}{dx} = \frac{d(Qy)}{dy}$.

§ XLIII.

Trouver l'équation générale des sphéroïdes dans l'hypothèse précédente.

Si on suppose que le canal quelconque, dont l'intégrale de $Pdy + Qydx$ exprime le poids, s'étende depuis le centre *C* jusqu'à un point quelconque *M* de la superficie, et qu'on retranche du poids de ce canal l'effet de la force centrifuge, c'est-à-dire la somme des efforts centrifuges des parties contenues dans la per

pendiculaire MQ à l'axe, le reste devra être une quantité constante :



Faisant donc............ $QM = z$
et la force centrifuge............ $= f$
lorsque la distance à l'axe est.... $= r$
on aura

$$\int (Pdy + Qydx) - \frac{fzz}{2r} = A$$

pour l'équation du sphéroïde.

§ XLIV.

Si la force centrale était exprimée par une fonction quelconque Y de la distance

en centre, et que la force perpendiculaire à cette direction fût exprimée par $\frac{X}{y}$ (X étant une fonction de l'Arc x ou des quantités qui en dépendent); il est évident que l'équilibre serait toujours possible, et que l'équation du sphéroïde serait

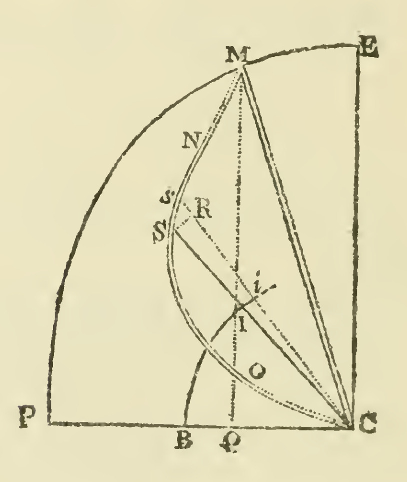
$$\int Xdx + \int Ydy - \frac{fzz}{2r} = A.$$

§ XLV.

Dénouement d'une espèce de paradoxe qui se rencontre dans l'hypothèse précédente.

Supposons qu'on cherchât l'équation du sphéroïde du § précédent, par le principe ordinaire de l'équilibre des colonnes centrales et droites, on trouverait simplement $\int Ydy$ pour le poids de la colonne CM, à cause que la force qui pousse perpendiculairement à CM, ne doit point agir dans cette colonne. Retranchant ensuite de $\int Ydy$, $\frac{fzz}{2r}$ somme des forces centrifuges, on aurait $\int Ydy$

$-\frac{fzz}{2r} = A$ pour l'équation du sphé-roïde. Il est vrai qu'on trouverait en même temps que le principe de M. Huygens donnerait $\int Ydy + \int Xdx - \frac{fzz}{2r} = A$; mais ne trouvant point d'erreur dans un raisonnement aussi simple que celui qui



apprend que le poids de CM est $\int Ydy$, que pourrait-on penser alors ? sinon que cette hypothèse de pesanteur ne peut pas convenir à l'équilibre des fluides.

Car, quoique par la solution précé-

dente, on fût assuré que tous les canaux *CONM* de figure quelconque seraient en équilibre, il suffirait que les seules colonnes droites partant du centre, ne fussent pas de même poids, pour détruire l'équilibre général, et par conséquent pour faire renoncer à l'hypothèse qu'on aurait prise.

Abandonnant cette hypothèse, on croirait qu'il faudrait, pour en avoir de possibles, que la pesanteur centrale fût composée d'y et d'x, afin qu'alors Pdy intégré seul en faisant x constant, donnât la même quantité que l'intégrale entière $s(Pdy + yQdx)$, lorsque $Pdy + Qydx$ est une différentielle complète.

C'est ainsi qu'il arriverait, si on faisait $P = xxy$ et $Q = xy$, ou $P = \frac{x}{\sqrt{(aa + xy)}}$ et $Q = \frac{1}{\sqrt{(aa + xy)}}$, etc. Mais dans les hypothèses où P est une fonction d'x et d'y, on trouverait encore dans certains cas une difficulté de même nature que celle qui paraît d'abord ne tomber que

sur les cas où P ne contient que la variable y.

Par exemple, que $P = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$ et $Q = \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}$; $Pdy + Qydx$ sera une différentielle complète, qui aura pour intégrale $\sqrt{(xx+yy)}$. D'où § XLI, le sphéroïde doit être possible, et avoir pour équation

$$\sqrt{(xx+yy)} - \frac{fzz}{2r} = A.$$

Cependant qu'on cherche l'équation du sphéroïde par l'équilibre des colonnes centrales et droites, on trouvera l'équation $\sqrt{(xx+yy)} - x - \frac{fzz}{2r} = A$.

Car, puisque la force centrale est $\frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$, le poids d'une colonne quelconque, droite et centrale, sera l'intégrale de $\frac{ydy}{\sqrt{(xx+yy)}}$ prise en faisant x constant, c'est-à-dire $\sqrt{(xx+yy)} - x$ (où la constante x est retranchée pour

compléter l'intégrale, le poids devant être nul lorsque $y = o$). Retranchant ensuite de cette intégrale la valeur $\frac{frz}{2r}$ de la somme des forces centrifuges, et égalant le reste à la constante A, on aura $\sqrt{(xx + yy)} - x - \frac{frz}{2r} = A$ pour l'équation du sphéroïde; or cette équation étant différente de celle que donne l'équilibre des canaux quelconques, on en doit conclure naturellement que l'hypothèse de gravité qui l'a donnée, est encore de celles qui ne conviennent pas à l'équilibre des fluides.

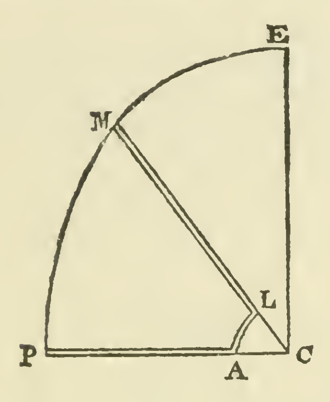
Comme la moindre exception à une règle générale jette des doutes sur tout le reste, à moins qu'on ne voie nettement ce qui peut particulariser les cas où cette règle manque, examinons s'il y a véritablement ici un sujet d'exception, ou bien jusqu'où il peut s'étendre.

Revenons premièrement au cas où la pesanteur centrale dépend d'une fonction de la distance au centre. Quoiqu'en

cherchant la valeur du poids d'une colonne droite qui se termine au centre, rien ne paraisse plus nécessaire que de négliger la force Q qui agit perpendiculairement à la direction de cette colonne; si on remarque cependant que l'expression de cette force $\frac{X}{y}$ devient infinie lorsque $y=o$, on verra que la goutte d'eau qui est en C, a pour se mouvoir circulairement une force qui peut être finie, et que par conséquent le terme $\int Ydy$ n'est pas le seul qu'on doive employer pour exprimer l'effort qui se fait dans la colonne.

Mais afin que cette réponse ne paraisse pas un paradoxe; prenons au lieu des deux colonnes PC, CM, un canal $PALM$ composé de deux colonnes PA, ML et d'un arc de cercle AL décrit du centre C et du rayon donné $CA = a$. Puisque $\frac{X}{a}$ exprime la force qui agit dans le sens de l'arc AL, $\int Xdx$ sera le poids de cet arc. Or comme le rayon CA n'entre point dans cette valeur, il s'en-

suit que le plus petit arc AL pèsera au-

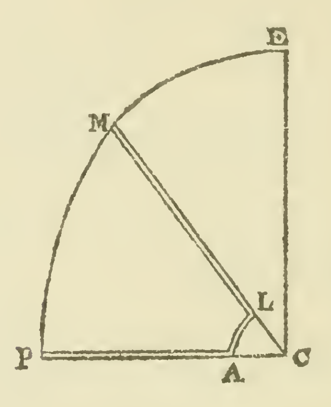


tant que le plus grand, s'il a le même nombre de degrés.

Donc, lorsque cet arc s'anéantit tout-à-fait en C, son poids n'en est pas moins $\int Xdx$. D'où il suit que l'effort total de MC est exprimé par $\int Ydy + \int Xdx - \frac{fzz}{2r}$, et par conséquent que cette quantité égalée à la constante A donne la vraie équation du sphéroïde.

De même, dans l'hypothèse où la force centrale $= \frac{y}{\sqrt{(rr+yy)}}$, et où la force

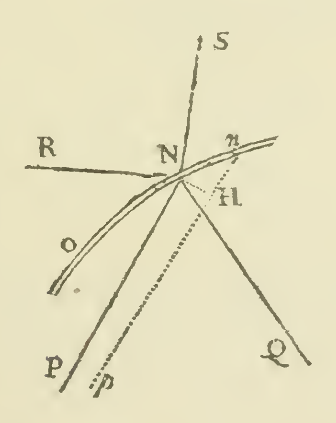
qui agit perpendiculairement au rayon $= \frac{x}{y\sqrt{(xx+yy)}}$, le poids d'un arc AL dont le rayon serait a, aurait pour valeur $\sqrt{(xx+aa)}-a$. Diminuant ensuite le rayon jusqu'à l'infini, on aurait



alors x pour le poids de l'arc anéanti en C, et cette quantité étant ajoutée à $\sqrt{(xx+yy)}-x-\frac{fzz}{2r}$ donnerait toujours l'équation $\sqrt{(xx+yy)}-\frac{fzz}{2r}=A$ pour exprimer le sphéroïde. Voilà donc toutes nos hypothèses rétablies.

§ XLVI.

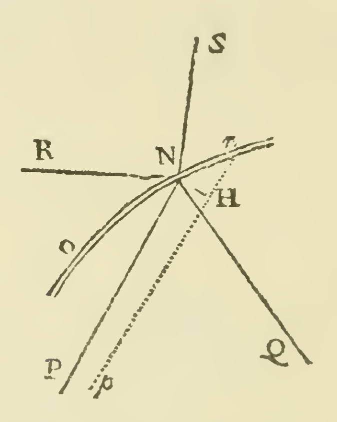
La pesanteur répandue dans toutes les parties d'une masse fluide, étant produite par plusieurs forces quelconques qui agissent suivant des directions données, trouver généralement s'il se peut former un sphéroïde, et quelle sera son équation.



Soient NO un canal quelconque, Nn un de ses élémens, NP, NQ, NR, NS les directions de toutes les forces, et P, Q,

R, *S*, etc. les fonctions qui expriment ces forces.

Ayant mené par le point *n* la ligne *np*, qui soit la direction de la force *P* au point *n*, on abaissera du point *N* sur *np* la per-



pendiculaire *NH*, et on nommera *dz* la ligne *nH*. On fera ensuite la même opération pour les forces *Q*, *R*, etc., et on nommera *du*, *dt*, etc., les lignes analogues à *nH*; cela fait, on verra facilement, qu'*afin qu'il y ait équilibre dans le sphéroïde, il faut que* $Pdz + Qdu + Rdt +$ etc, *soit une différentielle complète.*

Il est à remarquer que la position d'un point quelconque M ne dépendant que de deux variables, on ne pourra décider qu'une hypothèse est impossible, que lorsqu'on aura réduit $Pdz + Qdu + Rdt +$ *etc.* à ne renfermer que deux variables, parce que toutes les lettres, z, u, t, etc., et celle qui entreront dans P, Q, R, etc. se réduiront toujours à deux. Mais cette réduction sera inutile, si on apperçoit que $Pdz + Qdu + Rdt +$ *etc.* avec toutes ses variables, est une differentielle complète.

Il est clair que *lorsque* Pdz + Qdu + Rdt + etc. *sera une différentielle complète, son intégrale égalée à une constante donnera l'équation du sphéroïde.*

On voit bien que si le sphéroïde tourne, la force centrifuge aura dû être comptée au nombre des forces P, Q, R, etc.

CHAPITRE IX.

De l'équilibre des Fluides dont les surfaces peuvent avoir une autre courbure, que celle d'un sphéroïde produit par la révolution d'une courbe autour de son axe.

§ XLVII.

DANS tout ce qui précède, je n'ai point examiné d'autres lois de gravité, que celles dans lesquelles cette force est toujours la même dans tous les points d'un cercle dont le centre est dans l'axe, parce que n'ayant en vue que ce qui concernait la figure des Planètes, c'aurait été donner une généralité superflue au problème, que de choisir des lois dans lesquelles les masses fluides auraient pris d'autres formes que celle de sphéroide. Cependant, comme la recherche de la figure des Planètes n'est pas la seule question où l'on ait besoin d'étendre les principes or-

dinaires de l'Hydrostatique, et qu'il n'y a que très-peu à ajouter à la théorie précédente, pour la rendre propre aux fluides, dont les parties seraient animées par des forces dont les directions seraient variables de la façon la plus générale; j'ai cru qu'il serait à propos de s'y arrêter ici.

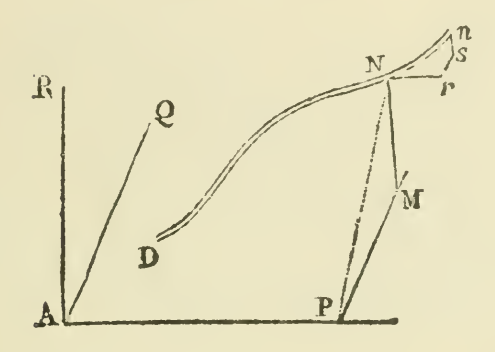
Les questions où la théorie des fluides doit être prise avec cette grande généralité, sont assez intéressantes pour les Physiciens; il s'agira, par exemple, de la cause qui fait monter l'eau dans les tuyaux capillaires, qui y fait au contraire descendre le mercure. On voudra savoir pourquoi les liqueurs qui sont en très-petite quantité ne se mettent pas de niveau, pourquoi elles s'attachent aux bords de certains corps, et qu'elles en fuient d'autres; pourquoi leurs surfaces dans tous ces cas affectent des courbures particulières au lieu d'être planes; et quantité d'autres phénomènes de même nature. On sent bien que l'explication de ces phénomènes ne peut pas être complète sans une théorie des fluides prise en général. Car on doit supposer, ce me semble, que les lois

d'hydrostatique s'observent dans la plus petite goutte d'eau, comme dans la masse la plus considérable. Si donc une partie d'un fluide est plus haute que les autres, que sa surface ne soit pas celle d'un plan horizontal, etc., il faut qu'il y ait une autre force que la gravité qui anime les globules de cette partie, et qui les fasse tendre suivant une autre direction que celles de tous les corps pesans ; et comme la courbure de la surface de ces petites masses fluides dépend de celles des corps qu'elles touchent, la question ne saurait être traitée généralement, qu'on n'examine les conditions qui déterminent l'équilibre d'un fluide, dont toutes les parties sont animées par des forces qui ont des directions quelconques, c'est ce que nous ferons ainsi.

§ XLVIII.

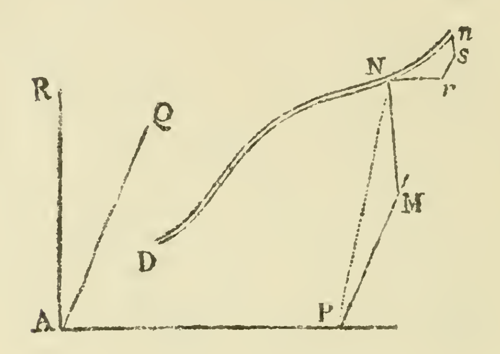
Supposant que la force qui anime les particules d'un fluide ait été décomposée en trois autres, dont la première agisse perpendiculairement à un plan QAP, *et la seconde et la troisième suivant des*

directions parallèles à deux lignes QA, AP de ce plan qui font un angle droit entre elles; on demande quelle relation doit être entre ces trois forces, pour que l'équilibre soit possible dans le Fluide.



Par le § III la masse fluide ne saurait être en équilibre, qu'un canal quelconque rentrant on lui-même ne soit en équilibre, ou, ce qui revient au même, que le poids d'un canal quelconque *DN* ne soit le même que celui de tout autre canal qui passerait par les mêmes points *D*, *N*. Il ne s'agit donc plus que d'exprimer cette condition; on suivra, pour cela, la même

méthode que dans le § XVI, c'est-à-dire qu'on fera ensorte que la somme des poids de tous les petits cylindres *Nn* compris dans le canal *DN*, soit exprimée par une



fonction des trois coordonnées de la courbe à double courbure *DN* qui ne dépende point de la nature de cette courbe.

Ayant abaissé *NM* perpendiculairement au plan *QAP*, *MP* perpendiculaire à *AP*, et mené les trois parallèles *ns*, *sr*, *rN* aux trois coordonnées *NM*, *MP*, *AP*, on fera

$$AP = x$$
$$PM = y$$

$MN = z$
$Nr = dx$
$sr = dy$
$sn = dz$

la force suivant NM . . . . $= P$
la force parallèle à MP . . . . $= Q$
la force parallèle à PA . . . . $= R$.

Multipliant ensuite le petit cylindre Nn par chacune des trois forces que l'on a, en décomposant les trois forces précédentes suivant la direction Nn, on aura pour le poids de ce petit cylindre $Pdz + Qdy + Rdx$, et par conséquent, l'intégrale de cette quantité pour le poids du canal DN. Or il est évident par les mêmes raisonnemens qu'on a employés au § XVI, qu'afin que cette intégrale ne dépende point de la courbure particuliere de DN, il faut que $Pdz + Qdy + Rdx$ soit la différentielle complète de quelque fonction de x, y, z, algébrique ou dépendante des quadratures.

§ XLIX.

On pourrait encore déterminer la relation que doivent avoir entre elles les trois

forces P, Q, R, en se servant du principe exposé dans le § XXI, qui consiste dans l'égalité de la pression des couches de niveau, et on arriverait au même résultat que par la méthode précédente.

§ L.

Lorsqu'on n'appercevra pas à la première inspection, si la quantité $Pdz + Qdy + Rdx$ est une différentielle complète, on se servira de la méthode que j'ai donnée dans les Mémoires de (*) l'Académie, c'est-à-dire qu'on verra si

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dz}, \; \frac{dP}{dx} = \frac{dR}{dz}, \; \frac{dQ}{dx} = \frac{dR}{dy}.$$

§ LI.

Lorsqu'on aura reconnu que $Pdz + Qdy + Rdx$ est une différentielle complète, on n'aura qu'à en prendre l'intégrale et

(*) Année 1740, p. 304

l'égaler à une constante, pour avoir l'équation de la surface de la masse fluide dont les parties sont sollicitées par les forces P, Q, R: la raison en est évidente, puisque l'équilibre de la masse fluide demande que tous les canaux qui partent d'un même point et qui aboutissent à la surface, soient d'un poids égal.

§ LII.

Si la masse de fluide dont les parties sont animées par les forces P, Q, R, tournait autour de l'axe des x, on trouverait facilement par les raisonnemens employés § XVIII, que

$$\int (Pdz + Qdy + Rdx) - \frac{f}{2r}(yy + zz) = A$$

serait l'equation de la surface qu'elle devrait avoir pour être en équilibre pendant cette rotation: f étant la force centrifuge à la distance r de l'axe de révolution.

§ LIII.

On pourrait d'abord être étonné qu'une masse de fluide pût tourner autour d'un axe, sans affecter la forme d'un solide de circonvolution, à cause qu'il semble que l'effet de la rotation soit de ranger toutes les parties du fluide dans des cercles: cependant, si on se rappelle ce qui a été expliqué dans l'Introduction, on verra que tout ce que cause la rotation, c'est d'introduire une force qui écarte de l'axe, et que cette force combinée avec les forces P, Q, R, ne doit pas produire une pesanteur dont la direction soit la même dans tous les points d'un cercle qui ait son centre dans l'axe de rotation, condition nécessaire pour qu'une masse de fluide prenne la forme d'un solide de circonvolution.

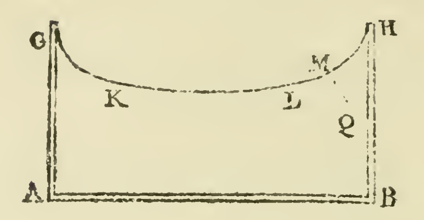
§ LIV.

Toutes les particules d'une masse fluide peuvent être en équilibre entre elles,

dans l'hypothèse où la force qui les anime est composée de la somme de toutes les attractions qu'elles exercent les unes sur les autres, de la force de la pesanteur, et de l'attraction d'un corps quelconque qui touche cette masse fluide.

La méthode précédente est suffisante pour déterminer s'il peut y avoir équilibre dans une masse fluide, lorsque la force qui agit sur toutes les parties est donnée par une valeur algébrique, ou que cette valeur peut être trouvée par les quadratures, ainsi qu'il arriverait si cette force dépendait seulement de l'attraction d'un corps de figure donnée. Il n'en serait pas de même, si cette force dépendait encore de l'attraction des parties du fluide même, car alors, pour employer cette méthode, il faudrait commencer par connaître la courbure de la surface de ce fluide, ce qui serait extrêmement difficile. Rien cependant n'est si aisé dans cette hypothèse, que de prouver l'équilibre des parties du fluide, si on se sert des mêmes raisonnemens que nous avons employés dans le chapitre II.

Soit *M* un globule quelconque de la surface *KLM* d'une masse de fluide con-



tenue dans un vase, *BH* un des bords de ce vase, ou bien un corps qui y est plongé; sans chercher la nature de cette surface, on doit voir qu'il y a une courbure à lui donner, telle qu'il en résulte, que le globule *M* attiré par trois forces; l'une, la pesanteur; l'autre, l'attraction de la masse du fluide; la troisième, l'attraction du vase, prenne la direction *MQ* perpendiculaire au plan tangent en *M*. Il n'est donc plus question que de savoir si l'équilibre se trouvera dans l'intérieur : or nous avons vu § III, que la question se réduisait à ce qu'un canal quelconque rentrant en lui-même, et placé dans l'intérieur de la masse *AGKLMHB*, fût en équilibre. De plus, par le § IX, on sait que si toutes les par-

ties d'un canal rentrant en lui-même, sont attirées vers un point fixe suivant une fonction de la distance à ce point, le canal sera en équilibre. Donc, considérant comme autant de centres attractifs, tous les atomes dont la masse fluide et le vase sont composés, chacun de ces centres ne troublera point l'équilibre du canal; et quant à la force de la pesanteur, il est bien clair qu'elle ne peut pas non plus troubler l'équilibre; donc le canal et toute la masse fluide seront en équilibre.

CHAPITRE X.

De l'élévation ou de l'abaissement des liqueurs dans les tuyaux capillaires. (*)

§ LV.

De tous les phénomènes dont nous avons parlé § XLVII, le dérangement du niveau

---

(*) Voyez sur ce sujet la Théorie de M. Laplace, exposée dans le Supplément au 10e Livre de la Mécanique Céleste. (*Note de l'Editeur.*)

dans les tuyaux capillaires, est le seul qui mérite actuellement que nous nous y arrêtions ; car la rondeur des gouttes de fluide la concavité de la surface de l'eau auprès du verre, la convexité du mercure, etc. sont si aisées à expliquer par le moyen de l'attraction, qu'il suffit pour cela de relire ce qu'on a dit dans le § LIV.

Ceux qui voudront être instruits des faits les plus curieux que l'on a découverts au sujet des tuyaux capillaires, n'auront qu'a lire l'excellente Dissertation qu'en a donnée M. Jurin dans les Transactions Philosophiques ; ils y trouveront un choix ingénieux d'expériences faites pour remonter à la cause de ces phénomènes. Mais quoiqu'il y ait beaucoup à profiter dans la lecture de cette pièce, j'avoue que je n'ai pas pu être satisfait de la théorie que M. Jurin y donne, et que j'ai cru que l'examen de cette question demandait plus de principes que cet Auteur n'en a employés.

§ LVI.

L'article de son Mémoire qui m'a fait penser ainsi, est celui où il réfute M. Hauksbée qui rapporte l'élévation de la colonne d'eau qui est dans le tuyau capillaire, à l'attraction de toute la surface du verre touchée par cette eau. M. Jurin établit, au contraire, que c'est à la seule petite partie annulaire du tube qui est au-dessus de cette eau, qu'il faut attribuer la suspension. Pour le prouver, il commence par remarquer d'après l'expérience, que la hauteur de l'eau élevée dans le tube, est toujours en raison renversée du diamètre du tube. De là il s'ensuit que la surface intérieure du tube touchée par l'eau est de même étendue dans tous les cas; et comme, au contraire, le poids de l'eau élevée est en raison du diamètre, M Jurin conclut que ce ne peut pas être par l'attraction de la surface que l'eau soit élevée, puisqu'une cause constante produirait un effet variable; il attribue ensuite la

suspension de cette eau à l'attraction de cette espèce d'anneau de verre qui est au-dessus de l'eau, parce que la circonférence, ou plutôt la petite surface de cet anneau se trouve proportionnelle à la quantité d'eau élevée.

§ LVII.

Voici présentement ce que j'objecte à ce raisonnement; c'est 1° qu'on ne sauroit employer le principe que les effets sont proportionnels aux causes, que quand on remonte à une cause première et unique, et non lorsqu'on examine un effet résultant de la combinaison de plusieurs causes particulières qu'on n'évalue pas chacune séparément. Or quand on compare l'élévation de l'eau dans deux tubes différens, l'attraction de chaque surface est le résultat de toutes les attractions de chaque particule de verre sur toutes celles de l'eau, et comme toutes les petites forces qui composent la force totale d'une de ces surfaces ne sont pas égales entre elles,

on n'a aucune raison pour conclure l'égalite d'attraction de deux surfaces de l'égalité de l'étendue de ces surfaces; il faudrait, de plus, que ces surfaces fussent pareilles. Par la même raison, quand même on admettrait que le seul anneau de verre qui est au-dessus de l'eau, serait la cause de l'élévation de l'eau; on n'en saurait conclure que le poids élevé devrait être proportionnel à ce diamètre, parce qu'on ne peut connaître la force de cet anneau qu'en sommant celle de toutes ses parties.

2°. Supposé qu'on eût trouvé que la force d'un anneau de verre fût en raison constante avec son diamètre, on n'en pourrait pas conclure qu'une colonne de fluide d'un poids proportionnel à cette force serait suspendue par son moyen. On voit bien qu'un corps solide tiré en en haut par une force égale à son poids, ne saurait tomber. Mais si ce corps est fluide, ses parties étant détachées les unes des autres, il faut faire voir qu'elles se soutiennent mutuellement. Je vais donc examiner la

question des tuyaux capillaires par les lois générales de l'equilibre des fluides.

§ LVIII.

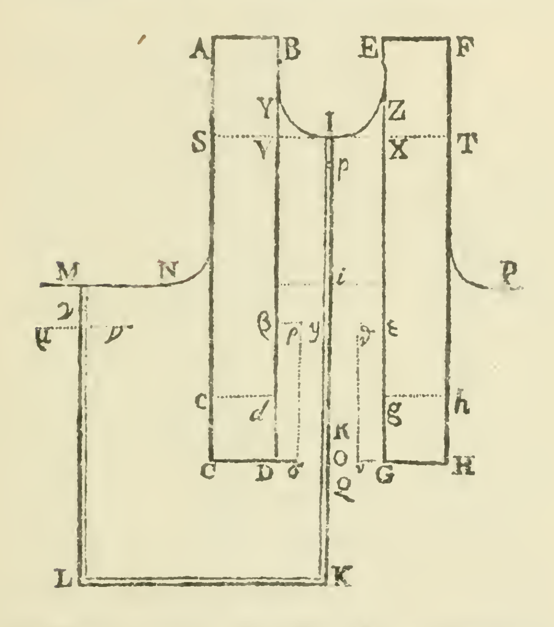
Dans cette recherche, je regarderai les particules du fluide comme infiniment lisses et infiniment petites par rapport au diamètre du tube, je supposerai la matière de ce tube parfaitement homogène, et sa surface infiniment polie De plus, je prendrai la même fonction de la distance pour exprimer tant l'attraction de la matière du tuyau, que l'attraction des parties du fluide, ne distinguant ces attractions que par les coefficiens ou intensités

§ LIX.

Examen des forces qui soutiennent l'eau dans les tuyaux capillaires.

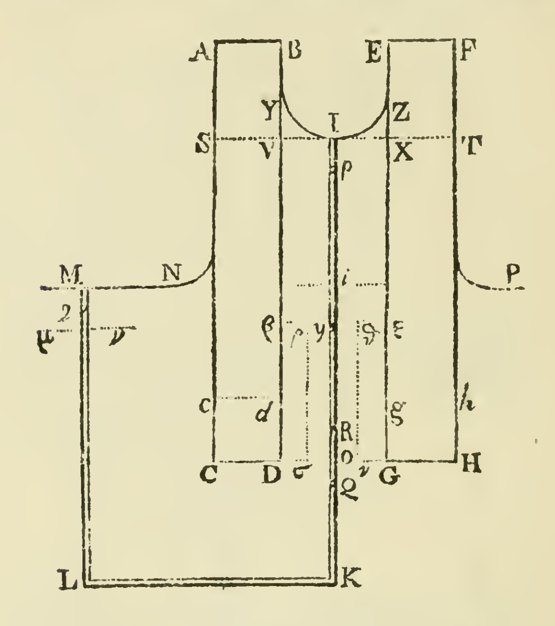
Soient *ABCDEFGH* la tranche du tuyau capillaire par un plan qui passe par l'axe, *MNP* le niveau de l'eau dans la-

quelle il est enfoncé, *Ii* la hauteur ou cette liqueur est élevée dans le tuyau, *YIZ* la petite courbe concave que l'attraction du verre fait prendre à l'eau ; de plus que *IKLM* représente un canal in-



finiment étroit, dont les deux branches *IK* et *ML* soient verticales, et la branche *LK* horizontale ; la première placée dans l'axe même du tube, la seconde et la troi-

sième placées assez loin du verre, pour que l'attraction en soit insensible. Je vais chercher quelles sont les forces qui agissent sur les parties de *ML* et de *IK*, afin



de voir si les colonnes peuvent être en équilibre, quoiqu'elles soient d'inégale longueur.

Pour y parvenir, je commence par faire le rayon intérieur du tube . . . . $= b$

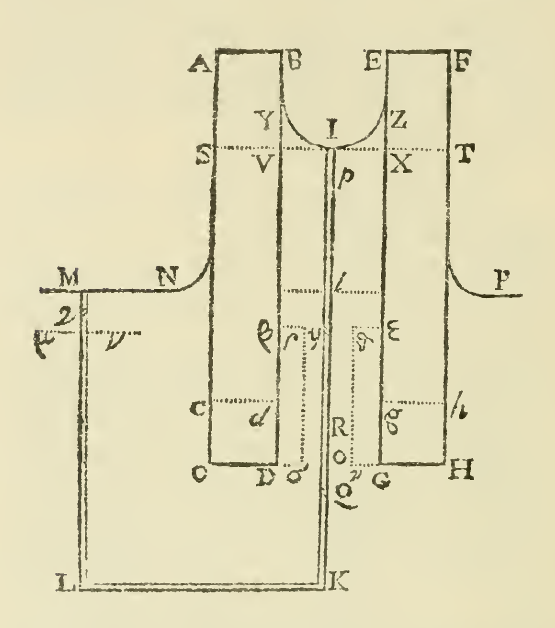
l'intensité de l'attraction du verre... $= h$
l'intensité de l'attraction de l'eau... $= k$
la force de la pesanteur............ $= p$

Ensuite je suppose que la fonction de la distance qui exprime la loi de l'attraction, tant du verre que de l'eau, soit donnée, et qu'on ait calculé,

1° La force avec laquelle un corpuscule placé à la distance.............. x d'un plan MN, est attiré par un corps dont ce plan est la surface extérieure, et je nomme cette force............. $[x]$ en supposant que l'intensité de l'attraction de ce corps soit l'unité. Je me sers de l'expression $[x]$, afin de désigner une fonction de x dans laquelle les dimensions du corps attractif n'entrent pas; car je suppose ce corps assez grand pour être traité comme s'il était infini, ce qui est permis par l'hypothèse que l'attraction n'est sensible qu'à une très-petite distance;

2° La force avec laquelle un corpuscule Q placé à la distance QO, x de la surface CH, est attiré par le tube ou cylindre

creux *CDABGHEF*, et je prends pour exprimer cette force, la fonction..$[b, x]$



supposant que l'intensité de l'attraction soit encore l'unité. On voit bien que j'entends par $[b, x]$, une fonction dans laquelle on ne fait entrer ni l'épaisseur ni la hauteur du tube, qu'on suppose infinies.

3° La force avec laquelle un corpuscule p placé à la distance x de VX, est attiré par la petite masse d'eau $YVXZ$, et je la nomme.... $[b, x, h, k]$.

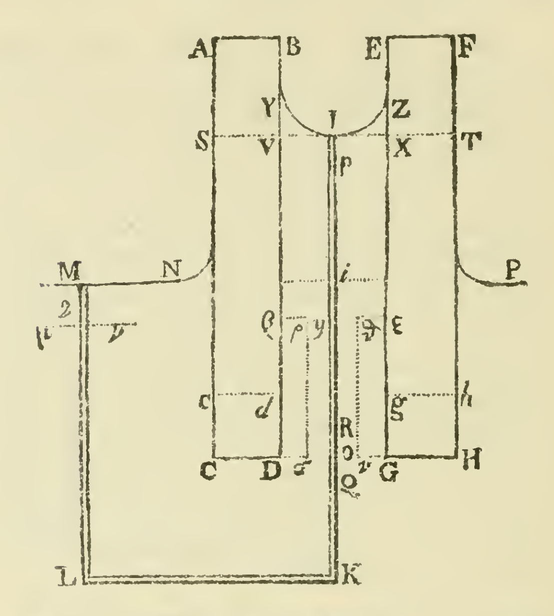
Cela posé, je dis que deux forces agissent dans la colonne ML pour la faire peser en enbas; l'une, la force de la pesanteur qui s'exerce dans toute la longueur ML, l'autre, l'attraction des parties de l'eau qui n'a d'effet que vers M. Que γ soit un corpuscule placé à une très-petite distance x de MN, en imaginant le plan $\mu\nu$ parallèle à MN, et placé de manière que γ soit au milieu de l'intervalle des deux plans; il est clair que l'eau renfermée dans cet intervalle n'agira point sur le globule γ, mais que celle qui sera au-dessous du plan $\mu\nu$ attirera γ en enbas, et que l'expression de sa force attractive sera $k[x]$. Donc le poids de ML sera

$$p . ML + \int k dx [x]$$

en supposant que $dx[x]$ ait été intégré, et qu'on ait fait dans l'intégrale $x = \infty$.

Quant à la colonne IK, pour en trou-

ver le poids, je remarque d'abord que l'attraction du tube n'est d'aucun effet, pour augmenter ou diminuer le poids des parties qui sont vers le bout *I*; car si le haut



ABVSEXTF du tube attire en enhaut les globules du fluide qui sont vers *I*, la partie du tube qui est inférieure à la surface *ST* les attire avec une force égale en enbas. Donc sans changer l'état de la ques-

tion, on peut supposer le tube d'une matière homogène à l'eau, quant à ce qui se passe vers l'extrémité *I*.

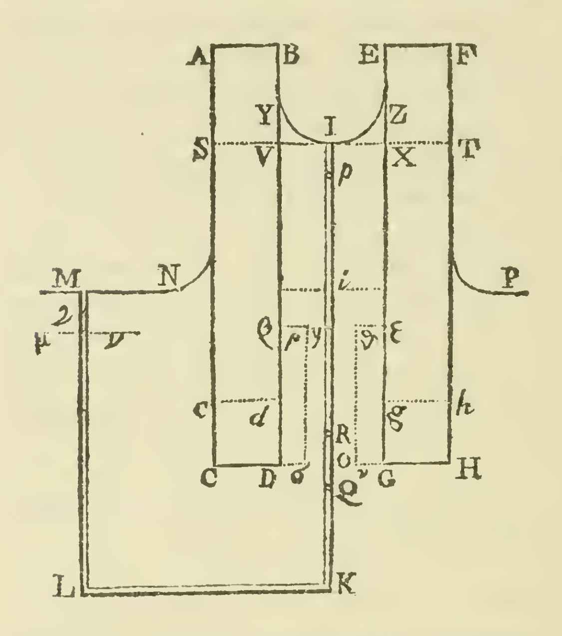
Or dans cette supposition, la matière contenue au-dessous du plan *SVIXT* attirera en enbas les particules voisines de *p* avec une force exprimée par $k[x]$, si la petite distance *Ip* est nommée x. Mais le cylindre creux *ABSVEXTF* attirera les mêmes parties en enhaut avec une force exprimée par $k[b, x]$, et la masse d'eau *YVXZ* les attirera dans le même sens avec la force $[b, x, h, k]$. Donc la force totale des particules voisines de *I* se fera en enbas, et aura pour expression $k[x] - k[b, x] - [b, x, h, k]$.

Donc le poids total de toutes les parties voisines de *I* sera

$$k\int dx\,[x] - k\int dx\,[b, x] - \int dx\,[b, x, h, k].$$

Il n'est plus question présentement que d'examiner ce qui se passe vers le bout *O*; pour cela j'imagine au-dessous du plan *CH*, un tube pareil à celui qui est au-dessus, mais qui soit d'une matière dont l'at-

traction ait la même intensité que celle de l'eau ; il est évident que ce nouveau tube attirera en enbas les particules voisines de *O* ; mais comme le tube de verre attirera



les mêmes parties en enhaut avec une force plus grande dans la raison de *h* à *k*, il s'ensuit qu'on peut mettre à part l'attraction du nouveau tube, et imaginer seulement que le tube *ABCDEFGH* soit d'une

matière dont l'attraction ait pour intensité $h-k$.

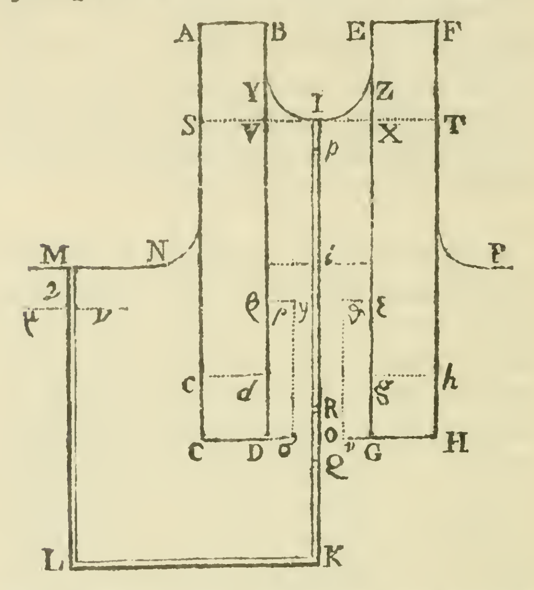
Quant à l'attraction de l'eau qui serait renfermée entre les parois YD, ZG prolongées au-dessous de DG, il est clair qu'elle ne doit pas être comptée, puisque les parties supérieures à DG, et les parties inférieures au même plan se détruisent leur effet réciproquement.

De là il suit que les parties Q qui sont à la distance x de DG, sont attirées en enhaut avec la force $(h-k).[b,x]$. De plus, les parties R qui seront au-dessus de DG à la même distance x de ce plan, seront attirées en enhaut avec la même force $(h-k).[b,x]$; car si on mène ch parallèle à CH et à la même distance de R, que R de CH; il est clair que le tube $ABcdEghF$ attirera en enhaut la particule R, comme le tube $ABCDGHFE$ attire le globule Q. Donc le poids total des parties voisines du bout O du tube se fera en enhaut, et aura pour expression

$$(2h-2k).\int dx[b,x].$$

Donc le poids de toute la colonne *IK* sera

$$p.\,IK + k\int dx\,[x] - k\int dx\,[b,x] - \int dx\,[b,x,h,k] - 2(h-k).\int dx\,[b,x];$$



égalant cette valeur à celle du poids de la colonne *ML*, il viendra, après la réduction, pour la hauteur *Ii* de l'eau élevée au-dessus du niveau

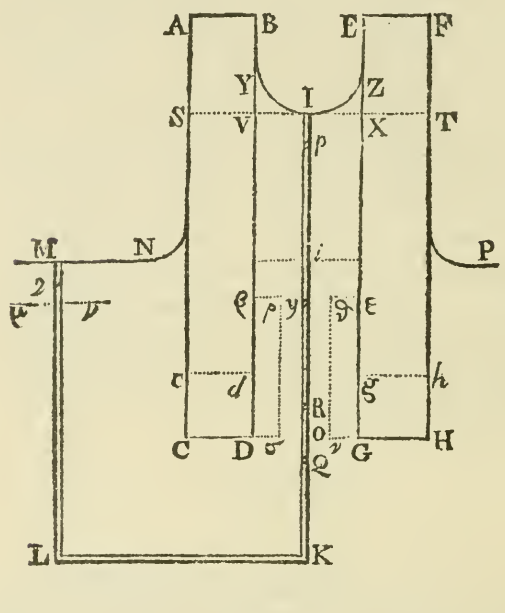
$$\frac{(2h-k).\int dx\,[b,x] + \int dx\,[b,x,h,k]}{p}.$$

Or, sans pousser le calcul plus loin pour savoir ce que seraient les quantités $[b, x]$ et $[b, x, h, k]$ suivant les différentes fonctions de la distance qu'on pourrait prendre pour exprimer la loi de l'attraction, on doit voir facilement qu'il y a une infinité de lois d'attraction, dans lesquelles l'expression précédente de *Ii* donnera une hauteur fort sensible, lorsque le diamètre *b* du tube sera très-petit, et au contraire, une hauteur presque nulle, lorsque le tube sera un peu gros. On doit voir encore qu'il y a une telle loi à donner à l'attraction, qu'il en résultera que *Ii* sera en raison renversée du diamètre, ainsi que l'expérience le donne.

§ LX.

On tire de l'expression précédente de *Ii* une proposition assez singulière, c'est que *quand même l'attraction du tuyau capillaire serait d'une intensité plus petite que celle de l'eau, pourvu que cette intensité ne fût pas deux fois moindre, l'eau monterait encore.* Car on voit par

le terme $(2h-k)\int dx[b,x]$ que toutes les fois que k sera moindre que $2h$, Ii sera positive.



§ LXI.

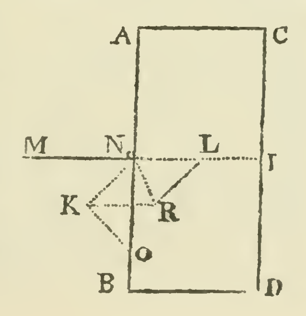
On pourrait cependant former une objection contre cet argument, on pourrait dire qu'on ne sait pas ce que devient la quantité $[b,x,h,k]$ qui exprime l'attrac-

tion de la petite masse d'eau *YVXZ* sur les particules qui sont vers *I*, parce que l'eau s'attirant plus elle-même que la matière du tube ne l'attirerait, il se pourrait bien faire que la courbe *YIZ* serait en dessous, et que le terme $\int dx\,[b, x, h, k]$ devînt par là négatif, ce qui empêcherait effectivement l'argument précédent d'avoir lieu.

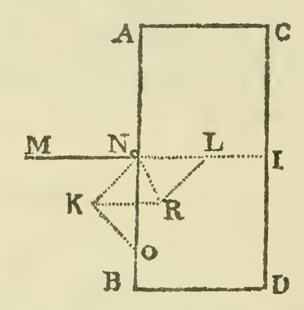
§ LXII.

Pour répondre à cette difficulté, il suffit de voir que l'eau peut faire une courbe concave auprès des parois d'un corps qu'on y trempe, quoique son attraction soit plus grande que celle de la matière de ce corps.

Que le parallélipipède *ABCD*, par exemple, représente le corps plongé, l'horizontale *NM* la surface de l'eau; afin de déterminer la



direction de la force avec laquelle un corpuscule placé dans l'angle *N* est attiré, tant par le corps *ABCD*, que par l'eau *MNB*, supposons que *NL* exprime l'attraction de *ABCD* sur *N*, et que *NO* exprime la force avec laquelle le même corpuscule serait attiré verticalement, si tout ce qui est au-dessous de la surface *MI* était d'eau ; il est clair qu'en décrivant sur *NO* le triangle rectangle isocèle *NKO*, *NK* sera l'attraction de l'eau *MNB* sur *N*; donc la diagonale *NR* du parallelegramme *NLRK* sera la direction de la force totale qui agit sur *N*. Or il est évident que cette ligne sera en dedans du corps *ABCD*, si *NO* est plus petit que 2 *NL*. Donc la courbe par laquelle l'eau vient joindre le corps *ABCD* sera concave, puisque les petits côtés de cette courbe doivent être perpendiculaires aux



directions des forces qui animent les particules de l'eau.

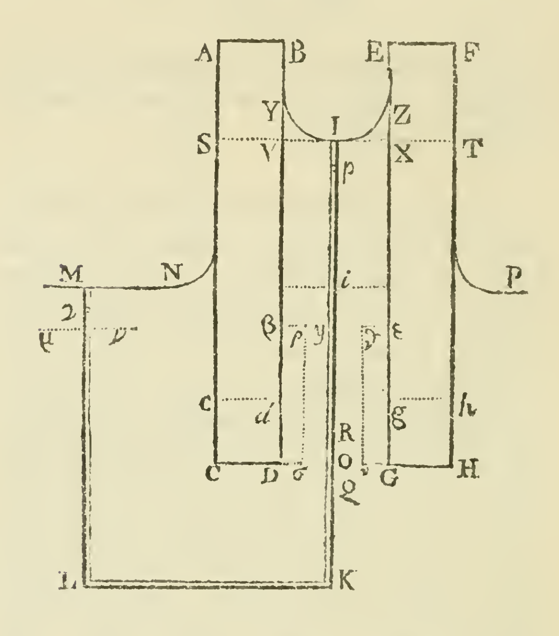
§ LXIII.

De l'ascension de l'eau dans un tuyau capillaire composé de deux cylindres d'inégale grosseur.

Comme l'attraction du bout inférieur du tube entre pour le moins autant que celle du bout d'enhaut, dans l'examen que je viens de donner des forces qui causent l'ascension de l'eau dans les tuyaux capillaires, ceux qui connaîtront les expériences de M. Jurin, pourraient s'en rappeler une, qui au premier coup-d'œil semblerait démentir les raisonnemens précedens: cette expérience consiste en ce que si on soude deux tuyaux capillaires d'inégale grosseur, et qu'on trempe le bout le plus étroit dans l'eau, cette liqueur n'y monte pas plus haut, que si tout le tuyau était de la même grosseur que par le bout d'enhaut.

Pour expliquer ce fait, reprenons tout

ce que nous avons dit § LIX, mais imaginons de plus, que $D\sigma\rho\beta G\varepsilon\vartheta\upsilon$ soit un nouveau tube de verre placé au-dedans de la



capacité *BDEG*; il est clair que l'addition de ce cylindre fera le même effet, que le tube composé des deux tuyaux soudés dont nous venons de parler. Maintenant, à oause que dans le calcul précédent, on

a supposé que l'espace $D\beta\rho\sigma G\varepsilon\vartheta\upsilon$ était d'eau au lieu d'être de verre, il faut ajouter aux forces qui agissent sur la colonne IK, l'effet de l'attraction d'un cylindre creux $D\beta\rho\sigma G\varepsilon\vartheta\upsilon$ supposé d'une matière dont l'attraction aurait pour intensité $h-k$. Or il est aisé de voir que cet effet est nul, car si le bout $D\sigma\upsilon G$ attire en enhaut les parties voisines de O, le bout $\beta\rho\vartheta\varepsilon$ attirera en enbas avec la même force les parties voisines de y. Donc IK restera de même poids qu'avant l'addition du tube $D\beta\rho\sigma\vartheta\upsilon G\varepsilon$. Donc la hauteur de cette colonne sera toujours la même.

§ LXIV.

Il ne serait pas plus difficile d'expliquer pourquoi, lorsque le tube composé des deux tuyaux inégaux a le bout le plus gros dans l'eau, la hauteur de la colonne qui se soutient dans ce tube composé, est la même, que si le tube était un seul cylindre de la même grosseur que la partie d'en haut.

§ XLV.

Quant à la descente du vif-argent dans les tuyaux capillaires, je ne m'arrêterai pas à l'expliquer, parce qu'il ne faut absolument que les principes que je viens d'employer, pour faire voir que les forces qui tirent en enbas dans la colonne qui traverse le tube, sont plus grandes que celles qui agissent dans les autres colonnes, et par conséquent que cette colonne doit être la plus courte.

CHAPITRE XI.

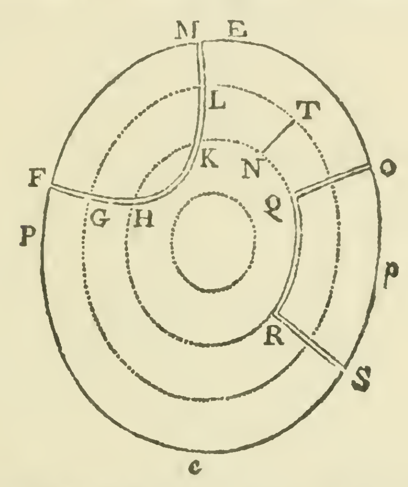
De l'équilibre des parties d'une planète composée de différens fluides qu'on suppose ne pouvoir pas se mêler.

§ LXVI.

Dans un amas de plusieurs fluides supposés parvenus à leur état d'équilibre, la surface qui termine le fluide supérieur, et celles qui séparent les différens fluides intérieurs doivent être

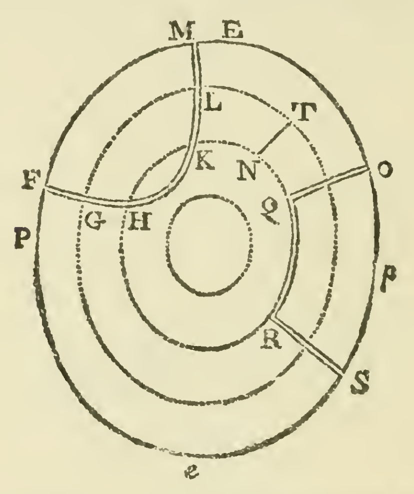
telles, qu'en tous leurs points elles soient perpendiculaires à la direction de la pesanteur.

Il est bien aisé de voir d'abord, que la surface extérieure *PEpe* doit être perpendiculaire à la direction de la pesanteur, puisque dans la planete composée de différens fluides, comme dans celle



qui est homogène, chaque particule *M* de la surface coulerait vers l'endroit où serait la pente, si elle ne pesait pas dans une direction perpendiculaire au plan tangent en *M*.

Pour démontrer que les surfaces intérieures qui séparent les différens fluides doivent avoir la même propriété, représentons-nous un canal *OQRS* qui joigne deux points *O*, *S*, de la surface *PEpe*, et qui soit tel que les deux branches *OQ*, *SR* se terminent à la même



couche *QR*, la troisième branche étant placée le long de la surface de cette couche : qu'on suppose ensuite la branche *QR* ou infiniment peu enfoncée dans le fluide inférieur, ou infiniment peu élevée dans le fluide supérieur ; il est cer-

tain que le poids de OQ et celui de SR, n'en changeront pas sensiblement, mais le poids de RQ serait très-différent, s'il y avait dans la surface RQ une force qui poussât ou vers R ou vers Q. Donc il faut que la direction de la pesanteur soit perpendiculaire à la surface $QRHK$, afin que le canal $OQRS$ puisse être en équilibre, et par conséquent pour que le sphéroïde entier puisse conserver une forme constante.

§ LXVII.

Les conditions qui déterminent les lois de pesanteur, dans lesquelles les planètes composées de différens fluides peuvent conserver une forme constante, sont les mêmes que celles qu'on a données pour les planètes homogènes.

Puisqu'un canal quelconque rentrant en lui-même doit être en équilibre, et que dans chaque couche le fluide ne peut pas manquer d'être homogène ; il est clair qu'aucune loi de pesanteur ne saurait convenir à l'équilibre de la planète composée de différens fluides,

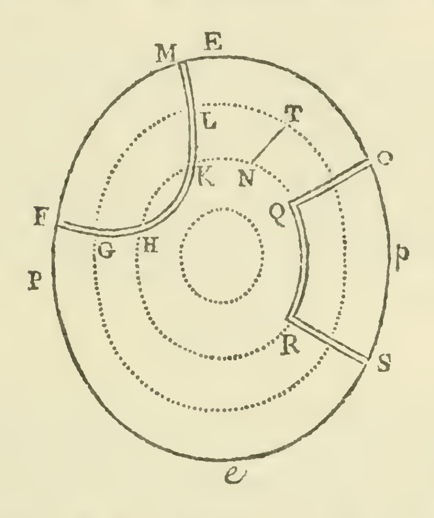
qu'elle ne convienne aussi à l'équilibre de celle qui serait homogène.

Pour démontrer ensuite l'inverse de cette proposition, c'est-à-dire qu'une loi de pesanteur qui conviendra à l'équilibre des planètes homogènes, conviendra aussi à l'équilibre des planètes composées de différens fluides ; on remarquera que, puisque dans cette loi de pesanteur, les canaux rentrans en eux-mêmes et contenus dans une même couche quelconque, seront en équilibre, il faudra nécessairement que deux tuyaux *GH*, *LK*, terminés par les deux surfaces d'une même couche, soient de même poids : or si les poids des tuyaux *FG*, *ML*, *GH*, *LK*, etc., sont respectivement égaux ; il s'ensuit qu'un canal quelconque *FGHKLM* qui traversera tant de fluides qu'on voudra, sera toujours en équilibre. Donc, etc.

§ LXVIII.

On pourrait démontrer assez facilement les vérités précédentes, en se ser-

vant du principe employé dans le chapitre V. Supposons toujours qu'une planète homogène soit partagée en une infinité de couches de niveau, c'est-à-dire de couches dont les surfaces sont en tous leurs points perpendiculaires à la



direction de la pesanteur : on a vu que l'équilibre du fluide demandait que la force de la pesanteur en un point quelconque N d'une couche, fût en raison renversée de l'épaisseur NT de la couche en ce point, parce que de là suivait

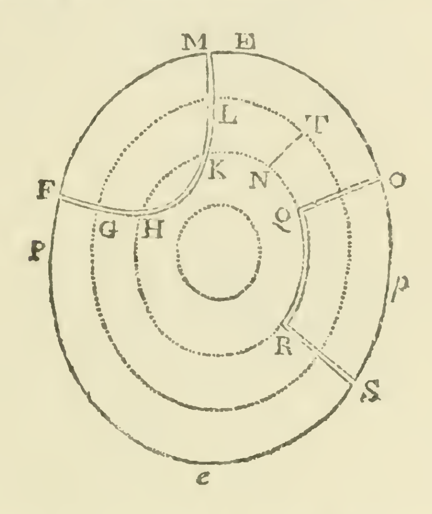
une pression égale dans tous les points du fluide compris sous cette couche; or il est clair que si on changeait la densité d'une couche sans changer ni sa figure ni la force de la pesanteur, il arriverait que le fluide compris sous cette couche, serait toujours également pressé dans tous ses points, quoique cette pression ne fût pas la même qu'auparavant: donc l'équilibre sera conservé dans une planète, si on laisse toutes les couches homogènes, ou si on les prend de différentes densités, pourvu cependant que les couches les plus denses soient toujours sous celles qui le sont moins.

§ LXIX.

Ainsi, lorsque la loi de la pesanteur sera donnée, et qu'on se proposera de trouver la figure que doit prendre un amas de différens fluides qui tournent autour d'un axe, il faudra simplement calculer la figure que la même masse aurait prise, si elle avait été entièrement homogène.

Si on veut trouver ensuite la figure

d'une surface quelconque *HKR* qui sépare deux des fluides de la planète, il n'y aura qu'à faire abstraction de toute la

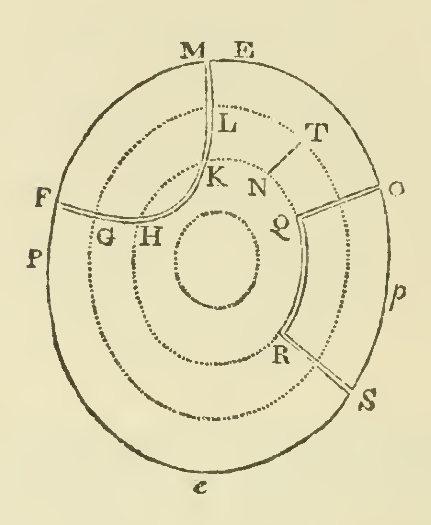


matière supérieure à cette surface, et chercher la figure que doit prendre la masse fluide *HKR*, considérée comme seule.

§ LXX.

Il n'en est pas de même dans l'hypothèse où la pesanteur est produite par l'attraction de la matière; car alors si la

planète est composée de différens fluides, la loi de la pesanteur n'est pas la même que si la planète était homogène, et par conséquent la surface *PEpe* doit se trouver différente dans les deux cas.



De plus, chaque surface *LTG* ne doit pas se trouver la même qu'elle serait, si on ôtait la couche *PEpeLTG* qui est placée au-dessus, à cause que l'attraction de cette couche doit entrer dans

l'expression de la pesanteur des parties de la masse *LTG*.

§ LXXI.

Au reste, dans cette hypothèse, sans connaître la courbe *PEpe*, ni les courbes *LTG*, *KQH*, c'est-à-dire sans connaître la loi de la pesanteur, on peut très-bien prouver, cependant, que cette loi ne peut manquer d'être une de celles qui conviennent à l'équilibre des fluides; je veux dire, qu'il est aisé de s'assurer qu'une masse composée de différens fluides, dont toutes les parties tournent autour d'un axe, et s'attirent réciproquement comme une fonction quelconque de la distance, peut avoir une forme qu'elle garde constamment. Il ne faut, pour en voir la raison, que se rappeler ce qu'on a vu au chapitre II, et employer les mêmes raisonnemens qu'au § LXVII.

§ LXXII.

On peut reconnaître par ce qui vient d'être établi, l'erreur de quelques au-

teurs, qui voulant diminuer l'expression que la théorie donne pour le rayon de l'équateur d'une planète, supposent que les colonnes de fluide qui vont du centre à la surface, sont d'autant plus denses, qu'elles sont plus voisines de l'équateur; car il est clair, par ce qui précède, que deux fluides d'inégale densité ne sauraient être à côté l'un de l'autre, mais qu'au contraire, ils doivent se placer de manière que le plus pesant soit le plus proche du centre, et que la surface qui les sépare soit toujours coupée perpendiculairement en tous ses points, par la direction da la pesanteur.

CHAPITRE XII.

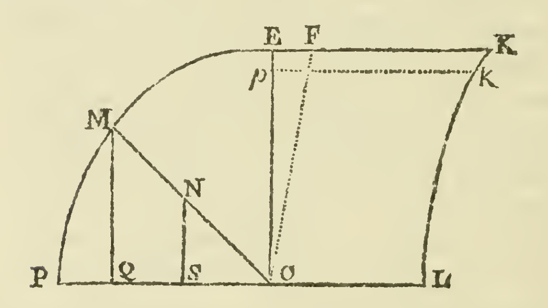
Manière d'employer la mesure actuelle des degrés du méridien et des longueurs du pendule à secondes, à la recherche de la loi suivant laquelle agit la gravité.

§ LXXIII.

CONNAISSANT par observation la longueur du pendule à secondes dans un grand nombre de lieux de la terre, il est facile d'en former une table qui donne la mesure de la pesanteur pour toutes les latitudes possibles. Connaissant ensuite la figure de la terre par la mesure des degrés du méridien pris à différentes latitudes, on en tirera (*) ce dont la force centrifuge a altéré la force de la gravité, c'est-à-dire qu'on saura, tant la force avec laquelle les corps tomberaient vers la terre, si elle ne tournait

(*) Voyez la solution de ce problème donnée par M. Maupertuis, pag. 182 de la figure de la Terre déterminée, etc.

pas, que la direction suivant laquelle ils seraient poussés, dans la même supposition. Mais ce ne sera point là encore connaître la loi de la gravité. car l'expression de cette force doit donner non-seulement sa mesure sur la surface de la terre, mais dans un point quelconque pris au-dedans ou au-dehors de la terre. Or il est évident qu'on peut trouver une infinité d'expressions pour la force de la gravité en un point quelconque *N* qui deviendront la valeur observée de cette force en *M*, lorsqu'on fera *CS* et *SN*



égales à *CQ* et à *QM*. Ainsi c'est un problème indéterminé, que de tirer des observations la loi de la gravité, même en supposant ces observations parfaite-

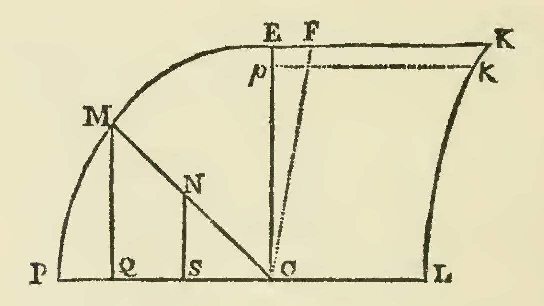
ment exactes; mais si on ne peut pas, comme dans les problèmes déterminés, en trouver une solution qu'on puisse démontrer être l'unique, on peut du moins, à l'aide de la théorie précédente, parcourir les hypothèses les plus naturelles qui puissent quadrer avec les observations, et en exclure d'autres auxquelles on se serait peut-être arrêté par la simplicité qu'elles offrent.

§ LXXIV.

Par exemple, *de la seule différence des degrés mesurés en France et en Laponie, on peut conclure que la gravité n'agit pas suivant la ligne tirée au centre de la terre;* car je vais faire voir que, quelle que fût la loi suivant laquelle les corps fussent poussés vers le centre de la terre, le rapport des axes ne pourrait jamais être qu'environ celui de 576 à 577. Or ce rapport diffère tellement de celui de 177 à 178 que donnent les mesures actuelles, qu'on ne saurait accorder ces mesures avec la supposition de la gravité dirigée vers le centre, sans supposer dans les observations des erreurs beaucoup

plus grandes que celles qui peuvent s'y être glissées.

Pour démontrer, que *lorsque la gravité a partout pour direction la ligne tirée au centre, les axes ne sauraient être entr'eux dans une raison plus grande que celle de* 576 à 577 : nous nous rappellerons que nous avons vu, § XIV, que le fluide ne pouvait être en équilibre dans cette hypothèse, que lorsqu'il n'entrait dans l'expression de la force de la gravité que la seule distance au centre. Cela posé, soit *CP* l'axe, *CE* l'équateur, et



la courbe *KL*, celle dont les ordonnées représentent la force de la gravité pendant que les abscisses désignent les distances au centre. Si on prend $Cp = CP$, il

est clair que l'espace $EpkK$ exprimera la différence du poids de la colonne CP au poids de la colonne CE, en supposant que la force centrifuge n'agit point sur la colonne CE. Que EF maintenant représente la force centrifuge en E, le triangle EFC exprimera ce que la force centrifuge doit diminuer du poids de la colonne CE : donc afin qu'il y ait équilibre dans les colonnes CE, CP, il faudra que $EpkK = EFC$, c'est-à-dire à cause de la petitesse de EF, qu'il faudra que $\frac{Ep}{EC}$ soit, à très-peu de chose près, la moitié de $\frac{EF}{EK}$; mais EF est environ $\frac{1}{288}$ de EK. Donc, etc.

§ LXXV.

Supposons maintenant, que la gravité, au lieu d'agir en tous les lieux suivant la ligne tirée au centre, eut toujours pour direction les perpendiculaires à une même courbe : on pourrait tirer des observations, non-seulement la nature de cette directrice de la pesanteur, mais la loi suivant laquelle les corps

seraient poussés dans tous les points intérieurs de la terre. Car de la figure du méridien et des pesanteurs observées, on tirerait la direction de la gravité en chaque point de la surface, et il serait facile ensuite d'en tirer la nature des courbes perpendiculaires à ces directions. De plus, par le § XXXV, on verrait que la gravité ne pourrait être exprimée que par une fonction des distances à ces courbes. Ainsi le problème serait déterminé.

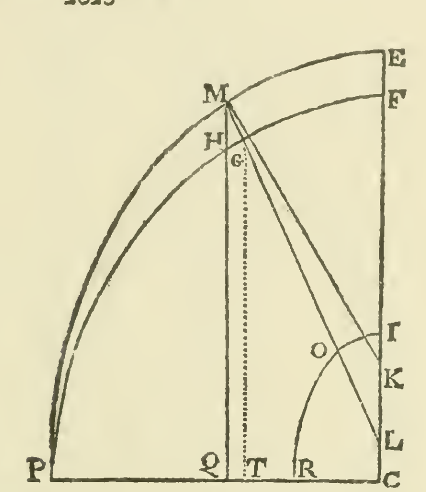
§ LXXVI.

Exemple pour le rapport des axes, et pour la variation de la pesanteur, qui résultent des observations faites en France et en Laponie.

Supposant ainsi que dans les ouvrages où ces opérations sont détaillées, que le méridien *PE* soit une ellipse dont les axes aient entre eux la raison de 177 à 178 (*); et que la force de la gravité, qui agit en un point quelconque *M*

(*) Degré du méridien entre Paris et Amiens, p. lvj.

suivant la perpendiculaire *MK* au méridien décroisse depuis *P* jusqu'en *E* proportionnellement au quarré du cosinus de la latitude; la diminution totale étant de $\frac{10}{2025}$ (*):

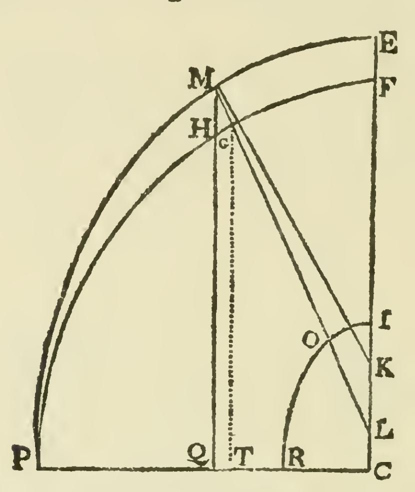


Je dis, que *si on prend* $KL = \frac{1}{288}\ QM$ et $CF = CP\left(1 + \frac{1}{255}\right)$:

(*) Pag. 181 de la fig. de la Terre déterminée, etc.

1°. *La droite* ML *sera sans erreur sensible la direction de la gravité en* M

2°. *L'ellipse* PF *et les courbes qui auront la même développée, seront les directrices de la gravité.*



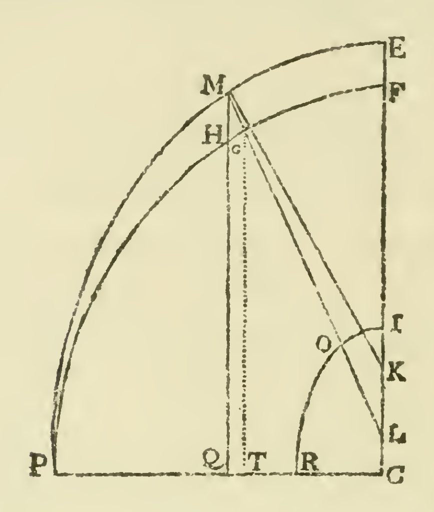
Pour prouver le premier de ces deux points, je commencerai par faire remarquer, que si *KL* et *MK* sont dans le même rapport que la force centrifuge et la pesanteur en *M*, *ML* doit être la direction de la gravité; or si *MK* exprime la pesanteur en *M*, il est clair, vu la petitesse de la force centrifuge, qu'on

ne commettra point d'erreur sensible en prenant pour la force centrifuge en E, la 283eme partie de CE; donc KL ou la force centrifuge en M sera la 288eme partie de QM.

Pour voir ensuite que la courbe PGF qui coupe perpendiculairement toutes les directions de la gravité, est à très-peu de chose près une ellipse dont le grand axe CF surpasse le petit CP de $\frac{1}{255}$, on fera attention que de la nature des ellipses, telles que PE qui diffèrent peu du cercle, il suit que CK est en même raison à QM, que $2CE - 2CP$ à CP. Cela posé, la question sera réduite à prouver que CL est en même raison à GT, que $2CF - 2CP$ à CP; c'est-à-dire dans la raison de 2 à 255; mais par la construction $CL = \frac{2}{255}(QM)$, et par conséquent $= \frac{2}{255}(GT)$, puisque MQ et GT peuvent être prises l'une pour l'autre en cette occasion. Donc, etc.

Soit maintenant RI la courbe que nous avons appelée *le noyau*, dans le

§ XXXIII, c'est-à-dire la dernière de toutes les ovales qui ont la même développée que l'ellipse PF; on trouvera



de la manière suivante la fonction de la distance à cette courbe, qui exprime la gravité en un point quelconque de l'intérieur de la terre.

p exprimant la pesanteur au pôle, on aura par les observations du pendule $p(1 - \frac{10.QM^2}{2025.CP^2})$ pour la pesanteur en M, c'est-à-dire pour la force qui agit suivant

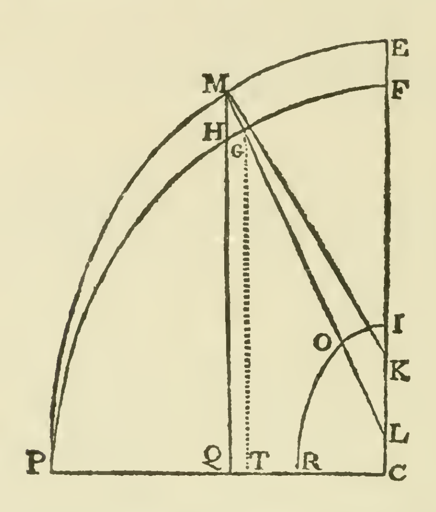
MK ; mais la gravité en *M* est à la pesanteur au même lieu comme *ML* à *MK*, c'est-à-dire comme $1 + \frac{MQ^2}{288.CP^2}$ à 1 : donc la gravité en *M* aura pour expression $p\left(1 - \frac{MQ^2}{682.CP^2}\right)$; ainsi il ne s'agira plus que de mettre à la place de *QM*, sa valeur en *MO*.

Pour trouver cette valeur de *QM*, on remarquera, 1° que *OG* ou son égale *FI* rayon osculateur de l'ellipse *PF* en *F*, a pour valeur $\left(1 - \frac{1}{255}\right) CP$. 2°. Que *MG* est à *EF*, dans la même raison que QM^2 à CP^2 ; de là on tirera que $MO = CP\left(1 - \frac{1}{255} + \frac{QM^2}{576.CP^2}\right)$ et partant $\frac{QM^2}{CP^2} = \frac{576.MO - 574.CP}{CP}$ qui étant substitué dans l'expression précédente de la gravité, donnera

$$p\left(\frac{1256.CP - 576.MO}{682.CP}\right)$$

pour la fonction cherchée de MO *ou de*

la distance au noyau RI, *suivant laquelle agit la gravité, dans la supposition que cette force a pour direction les perpendiculaires* MO.



A cause que MO diffère très-peu de CP, on pourrait facilement trouver différentes fonctions de MO qui feraient le méme effet que la précédente; par exemple $\frac{392}{288} + \frac{CP^2}{MO^2}$.

Je ne m'arréterai pas à examiner d'au-

tres hypothèses de gravité parmi celles où cette force ne dépend pas de la figure de la terre, parce que tout ce que nous avons dit suffit pour trouver dans tous ces cas, si l'hypothèse qu'on a choisie convient aux observations et à l'équilibre des fluides.

THÉORIE
DE LA FIGURE
DE LA TERRE.

SECONDE PARTIE.

Détermination de la Figure de la Terre et des autres Planètes, dans la supposition que toutes leurs parties s'attirent réciproquement en raison renversée du quarré des distances.

LORSQUE M. Newton cherche le rapport des axes de la terre, il commence par supposer qu'elle est un sphéroïde elliptique. Par cette supposition, et par quelques propositions établies dans le premier livre de ses principes, il lui est aisé de calculer la gravité des parties intérieures de la colonne qui va du pôle au centre. Employant les mêmes proposi-

tions et une nouvelle supposition qui est permise lorsque l'ellipse diffère peu du cercle, il trouve avec la même facilité la gravité des parties intérieures de la colonne qui va de l'équateur au centre. Il n'a plus besoin alors, que d'égaler la différence du poids de ces deux colonnes, à la somme des forces centrifuges des parties qui sont dans la colonne de l'équateur, pour déterminer le rapport des axes, qu'il trouve être celui de 229 à 230.

Mais comme ce rapport est entièrement fondé sur la supposition que la terre a la forme d'un sphéroïde elliptique, on ne saurait y compter, qu'on ne se soit assuré auparavant que cette supposition a lieu, ou bien qu'elle ne saurait produire qu'une erreur insensible en cette occasion. Cependant M. Newton, bien loin d'avoir démontré que la terre était ou approchait d'être un sphéroïde elliptique, n'a pas seulement affirmé qu'elle l'était. Il semble qu'il a cru qu'à cause que la terre ne s'éloignait pas considérablement d'un globe, il revenait

au même de regarder le méridien comme une ellipse, ou comme une autre courbe peu différente du cercle ; ce qui n'est point du tout arbitraire.

Quoi qu'il en soit, M. Newton n'ayant point démontré cette supposition, j'ai cherché les moyens de reconnaître si en effet elle était légitime, et je suis parvenu (*) à en prouver la vérité ; d'où il résulte que la grandeur des axes et celle du pendule qui bat les secondes à l'équateur et au pôle, déterminées dans l'ouvrage de M. Newton, sont exactes, en supposant, comme lui, que le sphéroïde soit homogène.

Au reste, comme la longueur du pendule et le rapport des axes donnés par M. Newton, ne s'accordent pas avec les observations que nous avons faites en Laponie, j'ai abandonné la supposition de l'homogénéité de la terre, et j'ai cherché sa figure, en supposant qu'elle fût composée d'une infinité de couches,

---

(*) J'en ai donné la démonstration en 1737, dans les Transactions Philosophiques.

dont les densités variassent suivant une loi quelconque, depuis le centre jusqu'à la surface.

J'ai donné, en 1738, dans les Transactions philosophiques, la solution de ce problème, en supposant que les couches fussent toutes des courbes semblables, et j'ai montré que ces courbes devaient être encore des ellipses. Depuis ce temps-là, ayant examiné plus à fond les principes d'hydrostatique sur lesquelles ma solution était fondée, j'ai reconnu qu'elle ne pouvait être bonne, qu'en supposant que les parties intérieures de la terre eussent été originairement solides, parce que les conditions que demande l'équilibre des planètes composées de différens fluides, ne permettent pas que les couches, c'est-à-dire les courbes qui séparent ces différens fluides, soient des courbes semblables; j'ai cherché alors quelles étaient les figures qu'il fallait donner à chacune de ces couches, et j'ai trouvé qu'elles devaient être encore des ellipses; mais avec cette différence, qu'au lieu d'être semblables,

elles devaient être d'autant plus aplaties, qu'elles étaient plus loin du centre; les aplatissemens suivant une loi qui dépend de la diminution de la densité depuis le centre jusqu'à la surface.

Pour rendre ma théorie plus générale, je ne me suis pas restreint à supposer que les parties intérieures des planètes ont été originairement fluides, et qu'elles se sont arrangées suivant les lois de l'hydrostatique: j'ai supposé aussi qu'elles avaient été de tout temps solides, alongées ou aplaties à volonté, et j'ai déterminé la figure que devait avoir la surface des planètes dans toutes ces hypothèses. Dans cette recherche, j'ai eu besoin de quelques-uns des problèmes que j'avais donnés dans mon Mémoire des Transactions Philosophiques; ainsi on les retrouvera ici, mais exposés plus généralement et plus clairement.

Si j'ai cherché la figure de la terre, dans toutes sortes d'hypothèses de densité, ce n'était pas seulement dans la vue de comparer la théorie de l'attraction avec les mesures du nord, je voulais avoir

une démonstration de l'article du livre des Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle, où M. Newton conclut des observations faites à Gorée, à la Guadeloupe, etc., que la terre devait être plus aplatie qu'elle ne le serait, si elle était homogène; mais je n'ai pas pu parvenir, quelles que fussent mes tentatives, à être d'accord avec lui sur ce point: j'ai trouvé, au contraire de ce que cet illustre auteur avance, que la terre devait être d'autant moins aplatie, que le raccourcissement du pendule du pôle à l'équateur était plus considérable.

Quoique toute cette seconde Partie ait pour objet de déterminer la figure des planètes, lorsque leurs parties sont hétérogènes, et que le cas de l'homogénéité s'en tire par une seule substitution, j'ai jugé à propos de traiter en particulier de la figure des sphéroïdes homogènes, et d'abandonner ma méthode, quant à ces sphéroïdes, pour suivre celle que M. Mac Laurin vient de donner dans son excellent Traité des fluxions. Cette méthode m'a paru si belle et si sa-

vante, que j'ai cru faire plaisir à mes lecteurs de la mettre ici.

Je n'ai pas entièrement suivi M. Mac Laurin dans les démonstrations de ses propositions, et dans la manière de s'en servir pour déterminer les axes des planètes, parce qu'en quelques endroits la théorie que j'ai établie sur les fluides me dispense de quelques lemmes dont il a besoin, et que dans d'autres, j'ai cru que l'analyse paraîtrait plus claire que la synthèse.

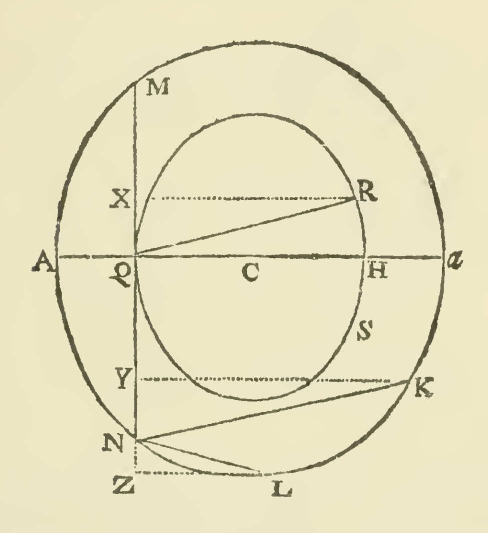
CHAPITRE I.

De la figure des Planètes, lorsque leurs parties sont supposées homogènes.

§ I.

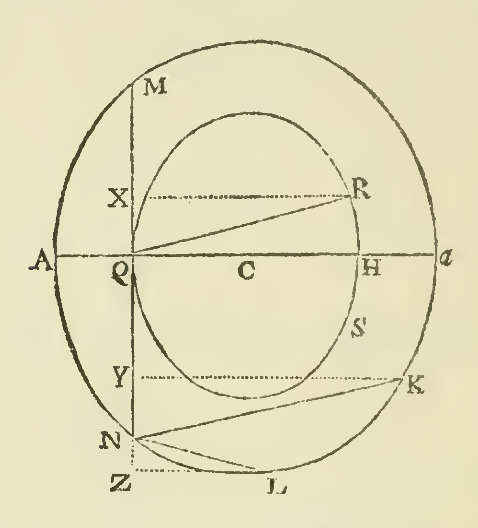
Soient aMAN, HRQS, *deux ellipses semblables*, C *leur centre*, Aa, QH, *leurs grands ou leurs petits axes*, MQN *une perpendiculaire à l'axe* Aa, QR

une ligne faisant un angle quelconque avec QH, NK *une parallèle à cette ligne, et* NL *une autre ligne, faisant avec* NZ *prolongement de* QN, *l'angle* LNZ *égal à l'angle* KNY ; *il s'agit de prouver que* KN + NL = 2 QR.



Qu'on imagine que toute la figure soit projetée orthogonalement sur un plan quelconque ; il est clair que dans la nouvelle figure, il faudra que la somme des lignes qui répondront à *KN* et à

LN, soit égale au double de la ligne répondant à *QR*. Supposons maintenant, que le plan sur lequel on projette la figure ait l'inclinaison convenable pour que



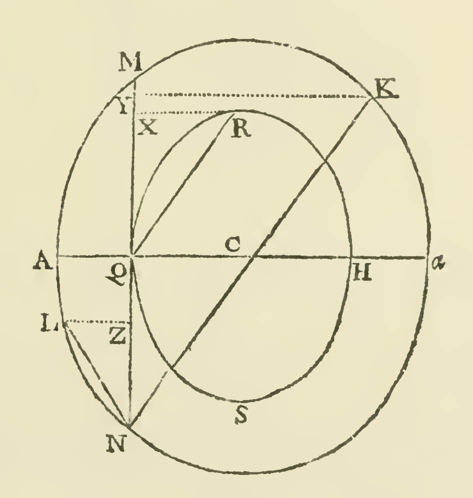
les ellipses *AMaN*, *QRS*, deviennent des cercles, la question sera réduite à prouver que $KN + LN = 2\ RQ$ dans le cas du cercle, or c'est ce que la géométrie élémentaire peut prouver si facilement, que nous ne nous y arrêterons pas.

§ II.

Si on abaisse des points *R*, *K*, *L* les perpendiculaires, *RX*, *KY*, *LZ*, on aura $2RX = KY + LZ$.

§ III.

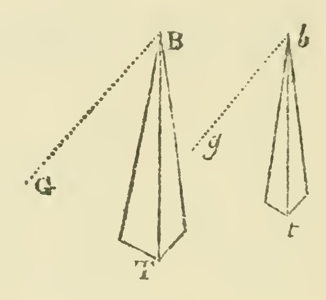
Il est évident que si l'angle *RQH* était tel, que le point *L* fût entre *A* et



N, on aurait $KN - NL = 2QR$, et partant $KY - ZL = 2RX$.

§ IV.

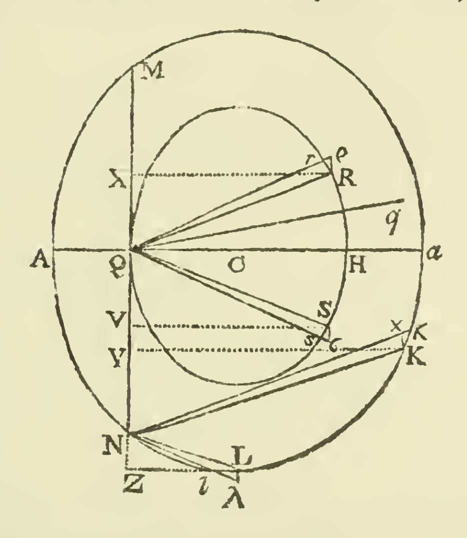
Supposant que BT *et* bt *soient deux pyramides quelconques semblables, et que toutes leurs particules aient une force d'attraction qui agisse en raison*



renversée du quarré des distances, les corpuscules placés en B *et en* b *seront attirés par des forces qui seront proportionnelles aux dimensions semblables* BT, bt *de ces pyramides. De plus, si* BG, bg *sont des droites semblablement placées par rapport aux deux pyramides, les parties des attractions qui agiront suivant ces directions, seront aussi dans la même raison de* BT *à* bt.

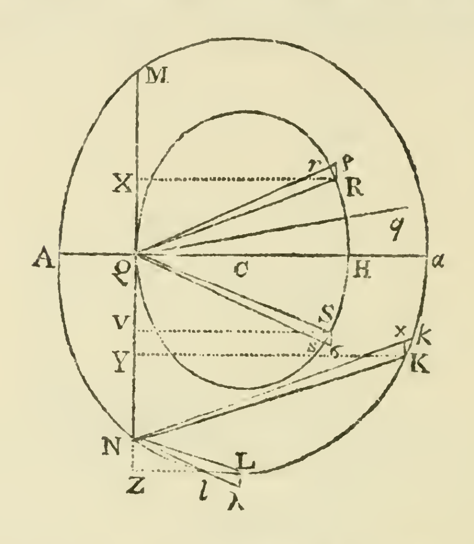
§ V.

Les mêmes choses étant posées que dans le § I, *si on imagine que le plan* MANa *tourne autour de* MN *en faisant un angle infiniment petit, les deux solides infiniment minces qui seront pro-*



duits pendant ce mouvement par les ellipses AMaN, QRHS, *exerceront la même attraction dans la direction* Qa; *le premier sur un corpuscule placé en* N, *le second sur un corpuscule placé en* Q.

Ayant mené QS égale à QR, et par conséquent parallèle à NL, on supposera les droites, sQ, rQ, kN, lN, infiniment proches des premières SQ, RQ, KN, LN et menées dans les mêmes



conditions, on tirera ensuite par les points, R, S, K, L, les droites $R\rho$, $S\sigma$, $K\chi$, $L\lambda$, perpendiculaires à l'axe, et terminées par les lignes, Qr, Qs, Nk, Nl.

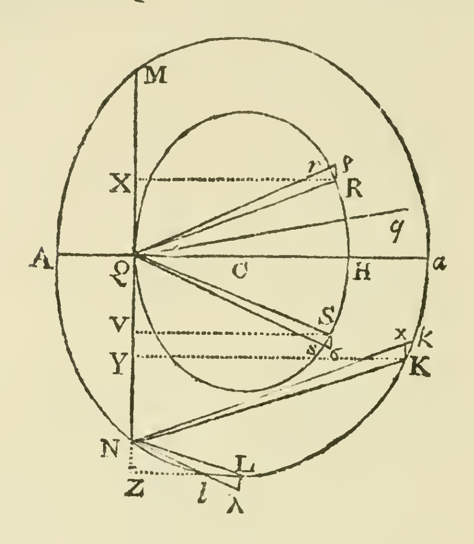
Cela fait, on remarquera que ces pe-

tites droites $R\rho$, $S\sigma$, $K\chi$, $L\lambda$ seront proportionnelles aux droites QR, QS, NK, NL.

On remarquera encore, que les petites droites ou arcs infiniment petits décrits par les points R, S, K, L, pendant le mouvement infiniment petit du plan $AMaN$ autour de MQN, doivent être proportionnels aux rayons RX, SV, KY, LZ, et par conséquent que les petites pyramides décrites par les triangles $QR\rho$, $SQ\sigma$, $KN\chi$, $LN\lambda$, seront semblables.

De là et du § IV, on tirera que les attractions de toutes ces pyramides sur les corpuscules N et Q étant décomposées suivant la direction Qa, les parties qui en viendront seront proportionnelles aux mêmes lignes RX, SV, KY, LZ. Or nous avons vu, § II, que $SV + RX$ ou $2SV = KY + LZ$; donc l'attraction des deux pyramides $RQ\rho$ et $SQ\sigma$, suivant Aa, et celle des deux pyramides $KN\chi$ et $LN\lambda$, suivant la même direction seront égales. Donc les deux solides infiniment minces produits par

le mouvement des deux secteurs d'ellipse *RQS*, *KNL* exerceront la même force sur les corpuscules *Q* et *N* dans la direction *Qa*.



Il est évident que ce raisonnement aura lieu tant que les lignes *QR* et *QS* donneront pour leurs parallèles *KN* et *NL* des droites renfermées dans le même segment; mais lorsque *QR* et *RS* seront arrivés à l'inclinaison nécessaire pour faire passer *NL* dans le segment *MNA*,

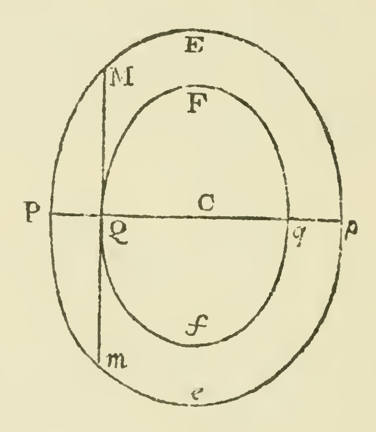
il faudra employer ce qu'on a établi dans le § III, et l'on verra que les attractions des pyramides dont est composé le solide produit par la révolution de *MAN*, étant retranchées des attractions des pyramides qui leur correspondent dans le solide produit par *MaN*, le reste sera encore égal aux attractions des pyramides correspondantes dans le solide produit par l'ellipse *RQS*, et par conséquent, que les attractions totales que les solides produits par ses deux ellipses entières exercent sur les corpuscules *N* et *Q* suivant *Qa*, seront les mêmes.

§ VI.

Si on imagine par le point *Q* une ligne quelconque *Qq* qui soit dans le plan élevé sur *Aa* perpendiculairement au plan *AMa*; il est évident que l'attraction sur le corpuscule *Q* suivant la direction *Qq*, et l'attraction sur le corpuscule *N* suivant la direction parallèle à *Qq*, seront égales.

§ VII.

Soient PEpe, QFqf *deux sphéroïdes elliptiques semblables*. C *leur centre*, Pp, Qq *leurs axes de révolution. Si on mène par* Q *la perpendiculaire* MQm *à* Pp, *et qu'on décompose suivant la direction parallèle à* Pp, *la force avec laquelle un corpuscule* M *ou* m *serait attiré par le sphéroïde* PMEpm, *la force qui en résultera sera égale à celle que le sphéroïde* QFqf *exercerait sur un corpuscule placé en* Q.



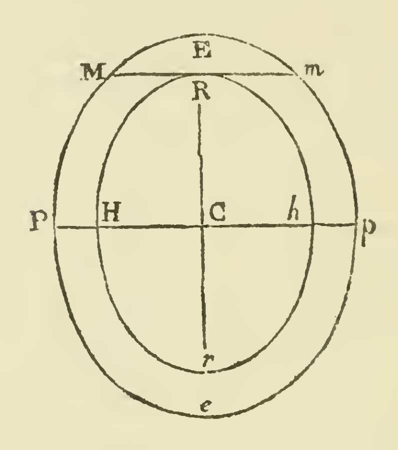
Si par la droite *MQm* on fait passer un plan quelconque, on verra par les propriétés des sections coniques, que les deux ellipses que ce plan coupera dans les deux sphéroïdes seront semblables.

Donc si on mène par *MQm* une infinité de plans différens, les deux sphéroides seront partagés en une infinité d'élémens, qui seront dans le même cas que les solides qu'on a examinés dans les § V et VI, c'est-à-dire, que l'attraction que chacun des élémens de l'ellipsoïde *QFqf* exercera sur le corpuscule *Q* suivant la direction *Qq*, sera égale à celle de l'élément correspondant de l'ellipsoïde *PMEpem* sur le corpuscule *M*, ou *m* suivant une ligne parallèle à *Qq*. Donc la somme totale des attractions de tous les élémens, ou les attractions des deux sphéroïdes seront les mêmes.

§ VIII.

Soient encore deux sphéroïdes semblables PEpe, HRhr; *si on mène main-*

tenant par R, MRm *parallèle à l'axe, je dis que l'attraction que le corpuscule* M *ou* m *souffrira de l'ellipsoïde* pEPe *suivant la direction perpendiculaire à* Pp, *sera égale à celle qu'un corpuscule placé en* R *souffrira du sphéroïde* RHrh.

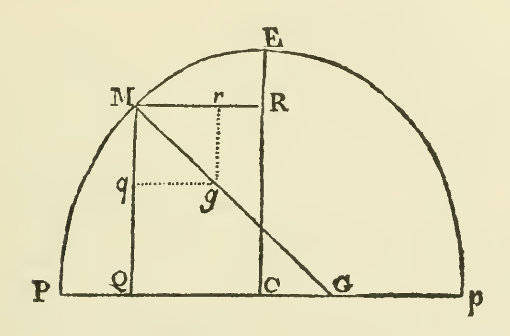


En partageant les deux sphéroïdes en une infinité d'élémens par des plans qui passent par *MRm*, on verra encore que toutes les tranches seront des solides semblables à ceux dont il a été parlé dans

le § V. Donc leurs attractions suivant *Rr* seront les mêmes; donc celles des deux sphéroïdes le seront aussi.

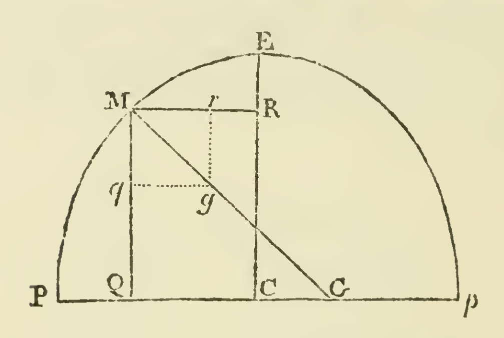
§ IX.

La figure du sphéroïde elliptique est celle que doit prendre une masse de fluide homogène qui tourne autour d'un axe, afin que toutes ses parties soient en équilibre.



Soit imaginé un sphéroïde quelconque *PEp* autour de l'axe *Pp*. La question se réduit à prouver que ce sphéroïde peut tourner dans un temps tel que la force centrifuge d'une particule quel-

conque *M* de la surface, étant combinée avec l'attraction que le sphéroïde exerce sur la même particule *M*, on ait pour force composée, une force *Mg* dont la direction soit perpendiculaire à l'ellipse en *M*. Car si cette condition est observée, nous avons vu (1ère part. § XII.)



que toutes les parties du sphéroïde ne peuvent pas manquer d'être en équilibre.

Soient l'attraction à l'équateur.... *E*
la force centrifuge au même lieu..... *F*
l'attraction au pôle.................. *P*

Par le § VII, l'attraction en *M* décomposée suivant *MR*, sera la même qu'au pôle *Q* d'un sphéroïde semblable

à *PME* qui aurait *CQ* pour demi-axe. Donc $P \times \frac{CQ}{CP}$ sera la force *Mr* qui tire *M* parallèlement à l'axe.

Par le § VIII, l'attraction au même lieu *M* suivant *MQ*, sera la même qu'à l'équateur *R* d'un sphéroïde dont *CR* serait le demi-diamètre de l'équateur. Donc $E \times \frac{CR}{CE}$ ou $E \times \frac{MQ}{CE}$ sera l'attraction de *M* suivant *MO*.

Mais $F \times \frac{MQ}{CE}$ sera la force centrifuge en *M*. Donc $(E - F) \frac{MQ}{CE}$ sera la force totale *Mq*, qui tirera *M* perpendiculairement à l'axe.

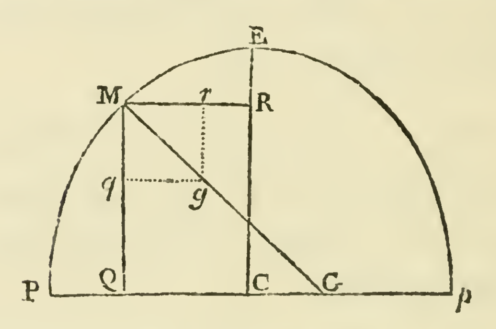
Il ne s'agit plus maintenant que de savoir si en quelque lieu de *PME* que soit placé le point *M*, la perpendiculaire *MG* peut toujours être le prolongement de la diagonale *Mg* du rectangle *Mqgr*, ou, ce qui revient au même, si on peut toujours avoir $Mr : Mq = QG : MQ$ ou

$$P \times \frac{CQ}{CP} ; \frac{MQ}{CE} (E - F) = \frac{CE^2}{CP^2} \times CQ :$$

MQ; mais cette proportion se réduit à

$$E - F : P = CP : CE$$

dans laquelle il n'entre aucune ligne qui désigne la position du point M ; donc *le sphéroïde sera en équilibre, pourvu que sa rotation se fasse dans le temps néces-*



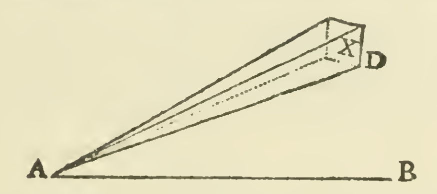
saire pour que la force centrifuge F *qui en résulte, soit celle que demande l'équation*

$$(E - F) \, CE = CP \times P.$$

§ X.

Soit AX. *une pyramide dont la base infiniment petite* X., *est perpendiculaire*

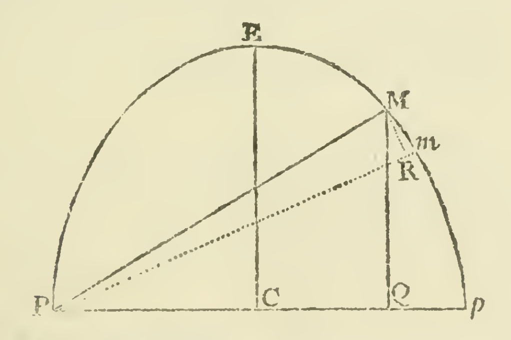
au côté AD. *L'attraction que cette pyra-*



mide exerce sur le corpuscule A, *suivant la direction donnée* AB, *a pour expression* $\frac{X}{AD}$ (Cosin. DAB), *le rayon étant* 1.

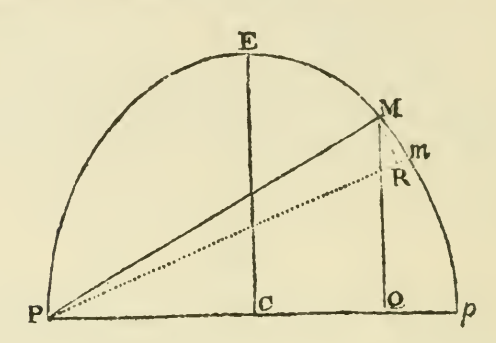
§ XI.

Trouver l'attraction qu'un sphéroïde quelconque aplati PEp *exerce sur un corpuscule placé au pole* P.



M et *m* étant deux points quelconques

infiniment proches d'un des méridiens, et MR la perpendiculaire abaissée de M sur Pm; si on fait faire un mouvement infiniment petit au plan PEp autour de l'axe Pp; il est clair que PMR



formera pendant ce mouvement une petite pyramide, qui pourra être prise pour un des élémens quelconques du solide produit par l'ellipse PEp.

Cela posé, soient

l'angle infiniment petit, dont se meut le plan PEp .... $= a$

le rayon étant .... $= 1$

$PC = 1$

$CE = m$

l'abscisse $PQ = z$

l'ordonnée $QM = u$
le cosinus de $MPQ = s$
$\sqrt{(mm - 1)} = n$

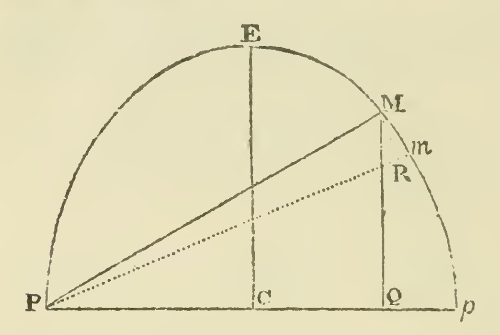
on aura $u\alpha$ pour la petite droite décrite par M, pendant le mouvement infiniment petit du plan $PEMp$ autour de Pp, et par conséquent $u\alpha\,(MR)$, pour la petite base de la pyramide produite par PMR.

Donc par le § précédent, on aura $\frac{\alpha us\,(MR)}{PM}$ ou $\frac{\alpha usds}{\sqrt{(1 - ss)}}$, pour l'attraction que cette pyramide exerce sur le corpuscule P, suivant la direction Pp.

Présentement, par la propriété de l'ellipse.............. $2m^2z - m^2z^2 = u^2$, et à cause que le cosinus de MPQ est $\frac{PQ}{PM}$, lorsque le rayon est 1, on trouvera................ $s = \frac{z}{\sqrt{(zz + uu)}}$.

De ces deux équations, on tirera une valeur de u en s, qui étant substituée dans la différentielle précédente, donnera........................ $\frac{2\alpha m^2s^2ds}{1 + n^2s^2}$

dont l'intégrale doit être la force avec laquelle le solide produit par le mouvement infiniment petit de l'espace *PEM*,



attire le corpuscule *P* suivant *Pp*. Pour intégrer cette quantité, je la mets sous cette forme..... $\frac{2am^2}{n^3}\left(nds - \frac{nds}{1 + n^2s^2}\right)$ dont l'intégrale est $\frac{2am^2}{n^3}(ns - ATns)$ *; faisant ensuite $s = 1$ dans cette expression, j'ai........... $\frac{2am^2}{n^3}(n - ATn)$ pour la force totale avec laquelle le

* Les deux lettres *AT* placées devant une quantité quelconque, dénotent l'arc dont cette quantité est la tangente, le rayon étant 1.

corpuscule P est attiré par le solide que l'ellipse PEp produit en se mouvant autour de Pp, c'est-à-dire pour l'attraction d'une tranche infiniment mince du sphéroïde, comprise entre deux méridiens ; or, comme le sphéroïde entier est composé d'autant de tranches égales et semblables à celle-là, que α est contenu dans la circonférence, on n'aura qu'à mettre c au lieu de α dans l'expression précédente, et l'on aura

$$\frac{2cm^2}{n^3}(n - ATn)$$

pour la quantité P, *ou l'attraction du sphéroïde sur un corpuscule placé au pôle.*

§ XII.

Afin d'employer cette valeur, on se servira de la suite qui donne l'arc par sa tangente, et l'on aura ainsi

$$ATn = n - \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{5}n^5 - \tfrac{1}{7}n^7 + etc.$$

faisant alors .... $m = 1 + \delta$

et partant .... $n^2 = 2n\delta + \delta^2$

l'expression précédente se réduit à

$$P = \frac{2c}{3}\left(1 + \frac{4}{5}\delta - \frac{2}{7}\delta^2 + \frac{8}{105}\delta^3 \; etc.\right)$$

qu'il serait superflu de pousser plus loin, lorsque l'axe ne diffère pas considérablement du diamètre de l'équateur.

§ XIII.

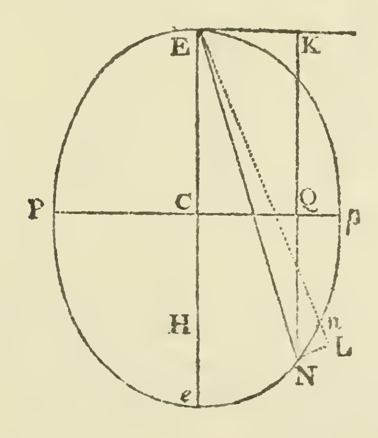
Si on suppose $\delta = o$ dans cette valeur, on aura $\frac{2}{3}$ c *pour l'attraction qu'un globe du rayon* 1 *exerce sur un corpuscule placé sur sa superficie.*

§ XIV.

Trouver l'attraction que le sphéroïde PEpe *exerce sur un corpuscule placé à un point quelconque* E *de l'équateur.*

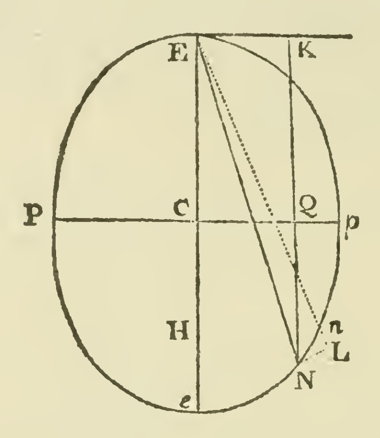
Ayant mené EK parallèle à CP, si on fait passer un plan quelconque par cette droite, on trouvera que la courbe qu'il formera en coupant le sphéroïde, sera une ellipse semblable à l'ellipse $EPep$. Donc si on imagine sur EH pris égal à Pp une sphère, et qu'on suppose, tant

cette sphère, que le sphéroïde, partagés en une infinité d'élémens par le moyen d'un plan qui tourne autour de *EK*, il suffira de connaître la proportion entre l'attraction d'un des élémens de la sphère, et l'attraction de l'élément correspondant du sphéroïde, pour savoir la proportion qui est entre l'attraction de la sphère et celle du sphéroïde.



Cela posé, choisissons pour élémens de la sphère et du sphéroïde, ceux qui sont formés entre le plan *EPep*, et le plan qui forme un angle infiniment petit avec lui :

la difficulté ne sera plus que de trouver l'attraction qu'exerce sur le corpuscule E le solide produit par le mouvement infiniment petit de l'ellipse $EPep$ autour de EK.



Pour la résoudre, soient tirées les deux droites quelconques infiniment voisines EN, En; NK perpendiculaire à EK, et NL perpendiculaire à NE.

On fera ensuite............ $EC = m$

$$CP = 1$$

$$mm - 1 = nn$$

$$EK = u$$

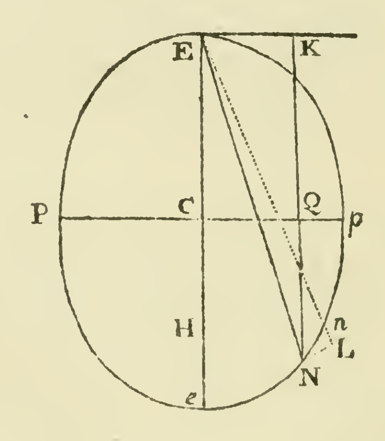
$$NK = z$$

l'angle infiniment petit, compris entre les deux plans qui forment l'élément dont on cherche l'attraction .... $= \alpha$
le sinus de l'angle *NEC* .... $= s$
on aura par conséquent αz pour la petite droite décrite par le point *N* pendant le mouvement infiniment petit de l'ellipse *EPep* autour de *EK*. Donc la base de la petite pyramide décrite par le mouvement du triangle *ENL*, aura pour valeur $\alpha z \times LN$.

Donc par le § X, l'attraction de cette pyramide sur le corpuscule *E* suivant la direction *Ee*, ou ce qui revient au même, l'attraction de la pyramide produite par *ENn*, sera $\alpha z . \frac{LN}{EN} . \sqrt{(1 - ss)}$ qui se réduit à $\alpha z ds$.

Présentement par la propriété de l'ellipse, on aura .... $uu = \frac{2mz - zz}{mm}$
et à cause que le sinus de *NEC* est $\frac{EK}{NE}$
on aura .... $s + \frac{u}{\sqrt{(uu + zz)}}$

De ces deux équations, on tirera la valeur de z en s qui étant substituée dans la différentielle précédente, donnera.................. $\frac{2m\alpha(1-ss)as}{1+nnss}$ dont l'intégrale exprimera l'attraction



suivant *Ee*, que le corpuscule *E* souffrira du solide produit par le mouvement du secteur *NEe*.

Pour intégrer cette quantité, on la mettra sous cette forme..............
$2\alpha\left(\frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{nds}{1+n^2s^2}-\frac{mds}{n^2}\right)$ dont l'inté-

grale $2\alpha\left(\frac{m^3}{n^3}ATns - \frac{ms}{n^2}\right)$ devient $2\alpha.$ $\left(\frac{m^3}{n^3}ATn - \frac{m}{n^2}\right)$ lorsque $s = 1$, et exprime l'attraction du solide produit par le mouvement infiniment petit de la demi-ellipse *Epe* autour de *EK*.

Si on reprend ensuite la différentielle $\frac{2m\alpha(1-ss)ds}{1+nnss}$, et qu'on y fasse $m = 1$, on aura $2\alpha ds - 2\alpha ssds$ dont l'intégrale $2\alpha s - \frac{2}{3}\alpha s^3$ devient $\frac{4\alpha}{3}$, lorsque $s = 1$, et exprime l'attraction du solide produit, en faisant tourner autour de *EK* le demi-cercle décrit sur *EH*. Donc le rapport de $\frac{4}{3}\alpha$ à $2\alpha\left(\frac{m^3}{n^3}ATn - \frac{m}{n^2}\right)$, c'est-à-dire celui de 1 à $\frac{3}{2}\left(\frac{m^3}{n^3}ATn - \frac{m}{n^2}\right)$, exprime le rapport demandé entre les attractions des élémens de la sphère et du sphéroïde, ou ce qui revient au même, entre les attractions que ces deux corps entiers exercent sur le corpuscule placé à l'équateur. Or $\frac{2}{3}c$ ex-

prime (§ XIII) l'attraction de la sphère; donc en multipliant l'expression précédente par $\frac{2}{3}c$, on aura

$$c\left(\frac{m^3}{n^3}ATn - \frac{m}{n^2}\right)$$

pour la quantité E *ou l'attraction du sphéroïde sur un corpuscule placé à l'équateur.*

§ XV.

Si comme dans le § XII, on met au lieu de ATn sa valeur en suite, et qu'on fasse

$$m = 1 + \delta,$$

il vient

$$E = \frac{2c}{3}\left(1 + \frac{3}{5}\delta - \frac{9}{35}\delta^2 + \frac{11}{105}\delta^3 \text{ etc.}\right)$$

§ XVI.

Si on suppose que le sphéroïde précédent soit fluide, et qu'il tourne autour de son axe dans le temps nécessaire pour qu'il soit en équilibre, on aura facilement par les §§ IX, XII et XV,

l'expression de la force centrifuge à l'équateur : car, par le § IX, on a $P : E - F = 1 + \delta : 1$, d'où l'on tire $F = E - \frac{P}{1 + \delta}$, dans laquelle substituant à la place de E et de P leurs valeurs, il vient

$$F = \frac{2}{3} c \left(\frac{4}{5} \delta - \frac{6}{35} \delta^2 - \frac{2}{35} \delta^3 \text{ etc.} \right)$$

§ XVII.

Connaissant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, trouver le rapport des axes, le sphéroide étant supposé en équilibre.

En nommant. . . . . φ
le rapport donné par l'observation, de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, on aura $\varphi = \frac{F}{E - F}$, dans laquelle substituant pour E et pour F leurs valeurs, il viendra

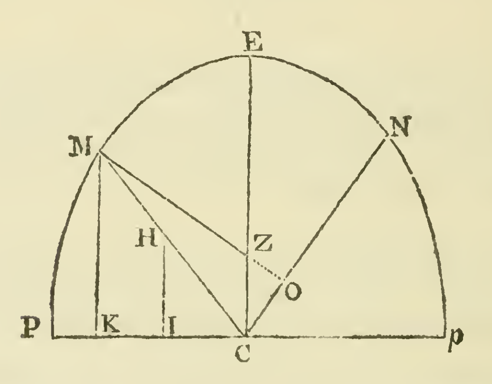
$$\varphi = \frac{4}{5} \delta - \frac{2}{175} \delta^2 + \frac{8}{875} \delta^3 \text{ etc.}$$

d'où l'on tirera

$$1 + \delta = 1 + \frac{5}{1}\varphi + \frac{5}{224}\varphi^2 - \frac{135}{6272}\varphi^3 \text{ etc.}$$

§ XVIII.

Sur un sphéroïde homogène et en équilibre, la force de la pesanteur en un lieu quelconque M *de la superficie, est proportionnelle à la perpendiculaire MZ.*



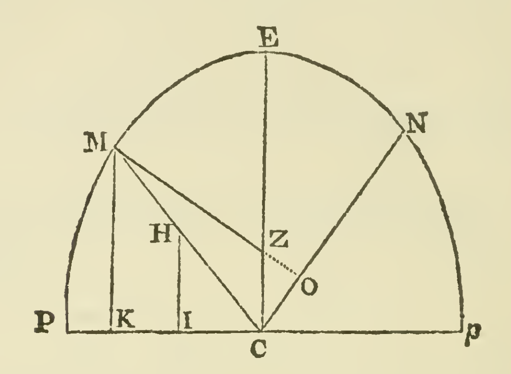
Par le corol. 3 de la proposition XCI des principes mathématiques de la philosophie naturelle, l'attraction qu'un corpuscule placé en *H* souffrirait suivant *HC*, serait à l'attraction qu'un autre

corpuscule placé en *M* souffrirait suivant la même direction, dans la raison directe de *CM* à *CH*. De plus la force centrifuge en *M* décomposée suivant *CM*, serait à la force centrifuge en *H* décomposée suivant la même direction, dans la même raison de *CM* à *CH*.

Donc les forces qui feraient peser les corpuscules *M* et *H* vers *C*, seraient entre elles comme *CM* à *CH*. Mais puisque le sphéroïde est en équilibre, il faut que le poids de la colonne *CM* soit le même, quel que soit le lieu du point *M*. Donc la force avec laquelle *M* pèse vers *C*, est en raison renversée de la distance *MC*.

Si on remarque présentement que la pesanteur en *M* a pour direction la perpendiculaire *MZ* en *M*, et que la force avec laquelle le corpuscule *M* est poussé vers *C*, n'est autre chose que la pesanteur décomposée suivant la direction *MC*, on verra que la pesanteur sera en raison renversée de *MO*; *CO* étant la perpendiculaire abaissée de *C* sur *MZ*

prolongée, ou ce qui revient au même, *NOC* étant le diamètre conjugué de *CM*.



Mais on sait par les propriétés des sections coniques, que le diamètre conjugué *CN* est proportionnel à la perpendiculaire *MZ*, et que le produit de *MO* par *CN*, c'est-à-dire le parallélogramme des diamètres conjugués, est constant. Donc *MZ* est en raison renversée de *MO*, donc la pesanteur en *M* est proportionnelle à *MZ*.

§ XIX.

Il suit de là, que si on nomme le

sinus de la latitude de M x
la pesanteur à l'équateur . . . . π
et qu'on suppose, comme dans le § XII, que le sphéroïde diffère très-peu d'une sphère, la pesanteur en un lieu quelconque M, aura pour expression

$$\pi(1 + \delta xx)$$

qui apprend que l'*augmentation de la pesanteur depuis l'équateur jusqu'au pôle, est proportionnelle au carré du sinus de la latitude*, ou, ce qui revient au même, que *la diminution de la pesanteur depuis le pôle jusqu'a l'équateur, est proportionnelle au carré du cosinus de la latitude.*

§ XX.

Détermination du rapport des axes de la terre.

Supposant d'abord avec tous les auteurs qui ont parlé de la figure de la terre, que la force centrifuge à l'équateur, soit la 289[me] partie de la force de la gravité; j'ai pour φ, $\frac{1}{288}$. Substituant

ensuite cette valeur de φ dans les deux premiers termes $\frac{5}{4}\varphi + \frac{5}{224}\varphi^2$ de la valeur de δ, j'ai $\delta = \frac{10}{2304}\left(1 + \frac{1}{16100}\right)$, d'où je vois qu'avec le seul terme $\frac{5}{4}\varphi$, on détermine le rapport des axes à $\frac{1}{16000}$ près, ensorte qu'à moins qu'on ne pût être sûr de ne s'être pas trompé d'une quantité plus considérable dans le rapport $\frac{1}{289}$ de la force centrifuge à la gravité, il serait inutile d'employer les autres termes de l'équation $\delta = \frac{5}{4}\varphi +$ etc. S'il y a donc quelque correction à faire à la valeur $\frac{10}{2304}$ que nous venons de trouver pour δ, il faut qu'elle vienne du rapport de la force centrifuge à la pesanteur. Pour avoir ce rapport le plus exactement qu'il est possible, voici les élémens que j'emploie.

1°. La longueur du pendule qui bat

les secondes à Paris, et je prends pour cette longueur $440\frac{17}{30}$ lignes, suivant les observations de M. de Mairan, ce qui donne 2174, 11 lignes pour l'espace que la pesanteur fait parcourir à un corps dans une seconde à la latitude de Paris.

2°. La longueur du degré du méridien mesuré en Laponie par MM de Maupertuis, Camus, le Monnier et moi, ce degré a été trouvé de 57438 toises, répondant à la latitude de 66° 20′. Voici l'usage que je fais de ces élémens.

Gardant les mêmes dénominations que dans le § XIX, et nommant de plus ε l'espace parcouru dans une seconde à la latitude dont le sinus est x, j'ai par le même § XIX, $\varepsilon\,(1 - \delta xx)$ pour l'espace parcouru dans une seconde à l'équateur, je substitue ensuite dans cette valeur pour δ, $\frac{1}{230}$ trouvée précédemment, pour x le sinus de la latitude de 48° 50′, et pour ε, 2174, 11 lignes, et j'ai $\varepsilon\left(1-\frac{1}{460}\right)$, c'est-à-dire 2198, 75 lig.

pour la chute d'un corps à l'équateur pendant une seconde.

Je cherche ensuite quel doit être le degré du cercle de l'équateur, lorsque D est le degré du méridien à la latitude dont le sinus est y, dans un sphéroïde dont l'axe est à l'équateur, comme à $1 + \delta$, et je trouve pour ce degré, $D(1 - 3\delta y^2 + 2\delta)$ dans laquelle je substitue pour D, 57438 toises; pour δ, $\frac{1}{230}$ et pour y le sinus de la latitude de 66° 20′; j'ai alors 57309 toises pour le degré du cercle de l'équateur, et par conséquent 7,54287 lig. pour le sinus verse de l'arc qu'un corps placé à l'équateur décrit dans une seconde.

Mais on vient de voir que ce même corps décrit 2167, 75 lig. dans le même temps, par la force de la pesanteur : donc le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, doit être

$$\varphi = \frac{100}{28752}.$$

Soit substituée présentement cette valeur de φ dans la valeur de δ, on aura enfin

$$\delta = \frac{1000}{230002}$$

qui montre que le rapport des axes de la terre est sans aucune erreur sensible, celui de 230 à 231, en la supposant homogène.

§ XXI.

Il suit de là et du § IX, que *dans la même supposition de la terre homogène, l'action de la pesanteur doit être plus petite à l'équateur qu'au pôle dans la même raison de* 230 à 231.

§ XXII.

Détermination du rapport des axes de Jupiter.

Pour connaître la force centrifuge et la pesanteur à l'équateur de Jupiter, on a besoin du temps de la rotation de cette

planète, du temps de la révolution d'un de ses satellites, et du rapport qui est entre la distance de ce satellite et le rayon de l'équateur de cette planète.

Soit le temps de la rotation de Jupiter $= t$
celui de la révolution du satellite . . $= T$
le rapport de la distance du satellite
au rayon de l'équateur de Jupiter. $= h$
En supposant que Jupiter soit réduit à un globe de même masse, on aura $\frac{2c}{3hh}$ pour l'expression de la force qui retient le satellite dans son orbite ; et l'on pourra regarder cette expression comme très-exacte, si on se sert du quatrième satellite ; car la différence de la figure de Jupiter à celle d'un globe, ne peut pas causer $\frac{1}{10000}$ d'erreur dans la détermination de la force avec laquelle il agit sur ce satellite.

Cela posé, il est facile de trouver l'expression de la force centrifuge à l'équateur de Jupiter ; car on sait que les forces centrifuges, ainsi que les forces

centripètes, sont dans les cercles, en raison directe des rayons et en raison inverse des quarrés des temps : donc

$$F = \frac{2cTT}{3h^3tt}.$$

Mais on a donné au § XVI, la valeur de F que demande l'équilibre du sphéroide ; égalant donc ces deux valeurs, on aura

$$\frac{4\delta}{5} - \frac{6}{35}\delta^2 - \frac{2}{35}\delta^3 \text{ etc.} = \frac{T^3}{h^3t^2}$$

soit fait présentement......... $\frac{T^3}{h^3t^2} = \beta$

et l'on tirera de l'équation précédente

$$1 + \delta = 1 + \frac{5}{4}\beta + \frac{75}{224}\beta^2 + \frac{125}{392}\beta^3 + \text{etc.}$$

valeur du rapport des axes.

Ainsi il n'est plus question que de tirer des observations la valeur de φ. Dans cette vue, je prendrai, suivant M. Cassini, pour le temps de la rotation de Jupiter .... 596′.
Ensuite d'après M. Pound, pour la distance du quatrième satellite au centre de Jupiter, mesurée en diamètres de Jupiter . . 26, 63,

et pour le temps de la révolution de ce satellite .... 24032′.

Ces trois nombres étant substitués pour t, h, et T dans la formule précédente, on aura pour le rapport qui est entre l'équateur et l'axe de Jupiter, celui de $100\frac{1}{2}$ à $90\frac{1}{2}$.

CHAPITRE II,

Où l'on détermine la figure que doit avoir une masse de fluide qui couvre un sphéroïde solide, composé d'une infinité de couches de différentes densités.

DANS ce chapitre et dans ceux qui le suivent, on ne se propose pas de trouver les axes des sphéroïdes par une méthode rigoureuse; mais les erreurs qu'on pourra commettre en la suivant, seront si petites, qu'il serait superflu de pousser plus loin l'exactitude. Par exemple, en cherchant les axes de la terre dans une

hypothèse ou leur différence doit être d'environ 10 lieues, on pourra se tromper d'une quantité aussi petite par rapport à 10 lieues, que 10 lieues le sont par rapport à l'axe de la terre. On sent bien qu'il serait inutile d'alonger beaucoup le calcul, pour ne pas négliger de pareilles quantités.

Quoiqu'une différence telle que celle qui est entre l'axe et le diamètre de l'équateur soit réellement finie, je la nommerai ici infiniment petite, et je la traiterai comme on traite les différentielles.

§ XXIII.

En prenant pour la valeur de l'attraction de chaque particule de matière la masse divisée par le quarré de la distance, je dis qu'une sphère composée de couches concentriques, dont les densités aux distances r *du centre sont exprimées par la fonction* R, *exercera sur un corpuscule placé hors d'elle à la distance* e *du centre, une attraction dont la valeur sera* $\frac{2c}{ee}\int Rrrdr$, *le rapport de la circonférence au rayon étant* c.

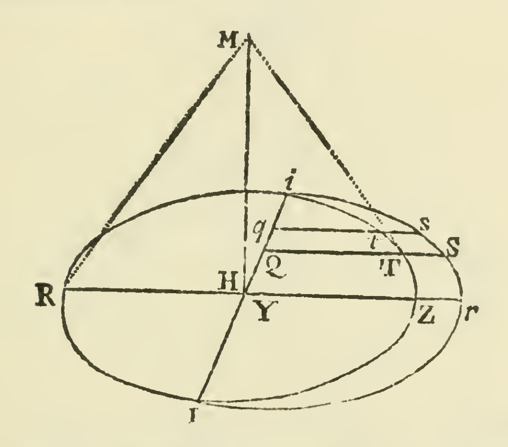
De ce que $\frac{2}{3}c$ exprime (§ XIII) l'attraction qu'une sphere homogène, du rayon et de la densité 1, exerce sur un corpuscule placé sur sa surface, il s'ensuit qu'une sphère de même densité et du rayon r, attirerait un corpuscule placé à la distance e du centre avec une force qui aurait pour valeur $\frac{2cr^3}{3ee}$, et par conséquent que $\frac{2cRrrdr}{ee}$ exprimerait l'attraction que l'orbe sphérique, dont la densité serait R, le rayon r, et l'épaisseur dr, exercerait sur le même corpuscule. Donc l'assemblage de tous les orbes, c'est-à-dire la sphère totale, attire ce corpuscule avec la force $\frac{2c}{ee}\int Rrrdr$.

§ XXIV.

Soient RirI *un cercle*, Y *son centre*, M *un corpuscule placé hors de ce cercle, dans la perpendiculaire* MH *au plan du cercle qui est infiniment peu écartée de* Y. *je dis que l'attraction que le cercle* RirI

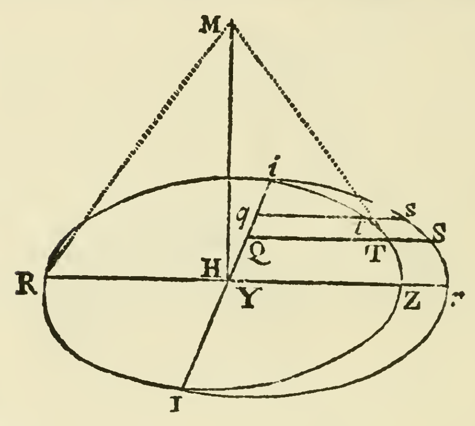
exerce sur le corpuscule M *dans la direction* HY, *sera exprimée par* $\frac{1}{2}c \cdot \frac{HY.RH^2}{MR^3}$

Ayant tiré le diamètre *RHr* et la droite *IHi* qui lui soit perpendiculaire, soit portée la figure *RiI* en *iZI*, l'espace *iZrI* sera la seule partie du cercle *RirI* qui attirera le corpuscule *M* suivant la direction *HY*.



Pour savoir l'attraction de ce petit espace, nous le supposerons partagé en élémens *TtSs*, et nous aurons pour l'attraction de chacun de ces élémens suivant la direction *HY*, la quantité

$\frac{TtsS \times QT}{MT^3}$ ou $\frac{2HY \times Qq \times QT}{MR^3}$, dont l'intégrale $\frac{2HY \times QHTZ}{MR}$ sera l'attraction de *TZrS*. Mettant ensuite dans cette valeur *Ii* au lieu de *QH*, on aura $\frac{IHiR \times 2HY}{MR^3}$ ou $\frac{1}{2} c \times \frac{HY \times RH^2}{MR^3}$ pour l'attraction que l'espace *iZIr*, ou ce qui



revient au même, le cercle entier *RirI*, exerce sur *M* dans la direction *HY*.

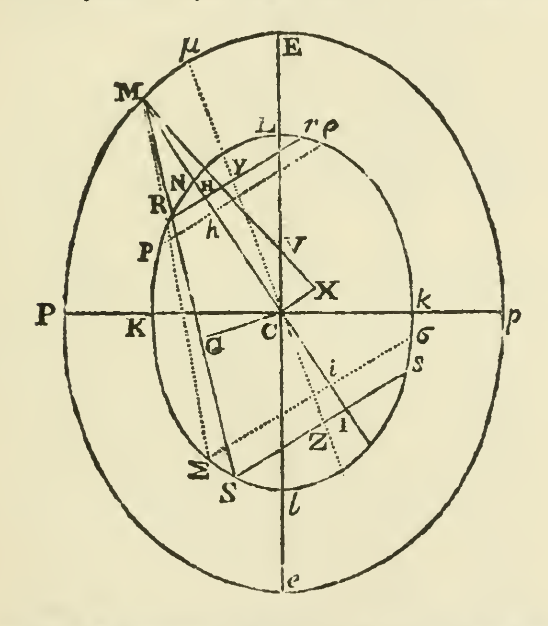
§ XXV.

Il est clair que si la courbe *RirI*, au lieu d'être un cercle, était une ellipse

dont les axes différassent infiniment peu l'un de l'autre, ou même une autre courbe différant infiniment peu du cercle, la proposition serait toujours vraie.

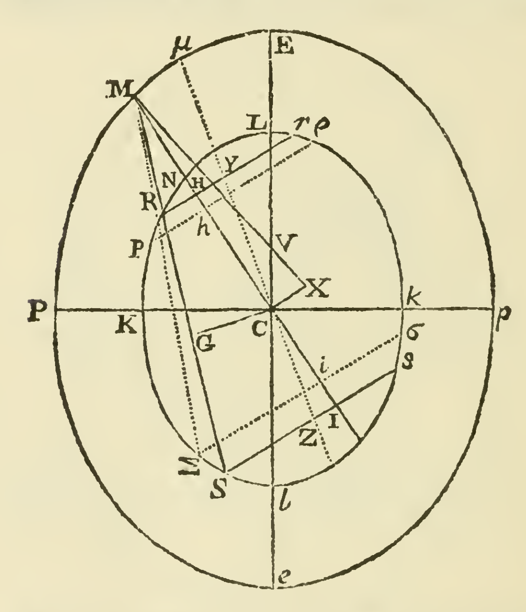
§ XXVI.

Soit M *un corpuscule placé à une distance quelconque du centre* C *d'un sphé-*



roïde elliptique KLkl, *dont l'axe* Kk

diffère infiniment peu du diamètre de l'équateur Ll. *Je dis que l'attraction que ce sphéroïde exerce sur* M, *suivant la direction* CX *perpendiculaire à* CM, *est exprimée par* $\frac{2c}{5} \cdot \frac{CX.CN^5}{CM^5}$; MX *étant perpendiculaire en* M *à l'ellipse* PMEpe *semblable à* KLkl.



Soient tirées du point *M* deux lignes quelconques infiniment proches l'une

de l'autre MRS, $M\rho\Sigma$, et des points R, ρ, S, Σ les perpendiculaires Rr; $\rho\varrho$, Ss, $\Sigma\sigma$ au diamètre MCI; il est évident que la différentielle de l'attraction qu'exerce, suivant CX, la tranche du sphéroïde renfermée entre les plans Rr, Ss, sera l'attraction de l'élément $Rr\rho\varrho$ moins celle de l'élément $Ss\sigma\Sigma$, puisque le second tire dans la direction IZ contraire à la direction HY du premier.

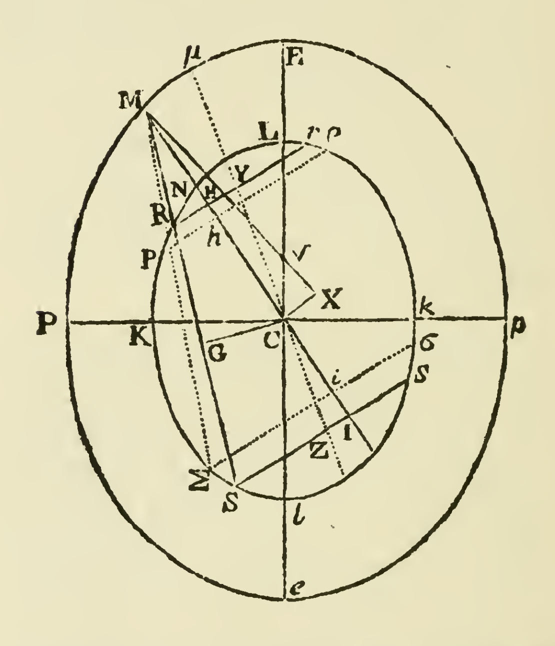
Ayant mené ensuite le diamètre μYCZ qui partage en deux parties égales toutes les ordonnées Rr, Ss, on aura par le § XXIV, pour les attractions des deux élémens

$$\frac{1}{2} c. \frac{HY}{MR^3}. Hh. RH^2 \text{ et } \frac{1}{2} c. \frac{IZ}{MS^3}. Ii. SI^2$$

Or si on remarque que $MC\mu$ est égal à l'angle que $C\mu$ fait avec la perpendiculaire à l'ellipse PME en μ, et qu'au lieu de l'angle que $C\mu$ fait avec la perpendiculaire en μ, on peut prendre l'angle CMX, à cause que μMC diffère infiniment peu d'un droit, et que μ est infiniment près de M, on verra qu'au lieu de HY, on pourra mettre $\frac{CX. CH}{CM}$; et au lieu

lieu de IZ, $\frac{CX.CI}{CM}$. D'où l'on aura pour l'attraction des deux élémens $Rr\rho P$ et $Ss\sigma\Sigma$,

$$\frac{1}{2} c \cdot \frac{CX}{CM} \left(\frac{RH^2.CH.Hh}{MR^3} - \frac{SI^2.C.I.Ii}{MS^3} \right)$$



Pour intégrer cette quantité, je regarde l'ellipse $KLkl$ comme un cercle,

ce qui est permis alors ; j'ai par-là $CH \times Hh = - RH \times d(RH)$ et $CI \times Ii = - SI \times d(SI)$; faisant donc ces substitutions, et remarquant en même temps que $\frac{RH}{MR} = \frac{SI}{MS} = \frac{CG}{MC}$ (CG étant la perpendiculaire à MRS), il vient pour la quantité à intégrer

$$\frac{1}{2} c \cdot \frac{CX}{CM^4} \cdot CG^3 \cdot d\,(SI - RH)$$

Soit fait maintenant.......... $CM = e$
$CN = r$
$RG = u$

on aura........... $CG = \sqrt{(rr - uu)}$

et......... $SI - RH = \frac{2u\sqrt{(rr - uu)}}{e}$

ainsi la différentielle précédente se changera en

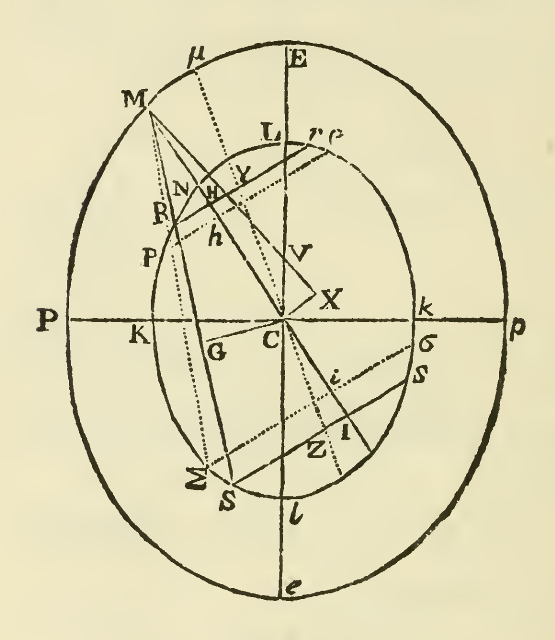
$$c \cdot \frac{CX}{e^5} (r^4\,du - 3r^2u^2du + 2u^4du)$$

dont l'intégrale

$$c \cdot \frac{CX}{e^5} (r^4u - r^2u^3 + \tfrac{2}{5}u^5)$$

exprimera l'attraction suivant CX de la tranche du sphéroïde renfermée entre

les plans Rr, Ss; et faisant $u = r$ dans cette intégrale, elle deviendra $\frac{2c}{5} \cdot \frac{CX.CN^5}{CM^5}$ valeur de l'attraction totale du sphéroïde $KNLkl$ sur le corpuscule M, suivant CX.



§. XXVII.

Si au lieu de l'attraction suivant CX, on imaginait une force suivant CV qui

fit le même effet, il faudrait que cette force fût exprimée par $\frac{2}{5}\, c \,.\, \frac{CV \;\; CN^5}{CM^5}$, parce qu'alors décomposant cette force suivant CX, elle serait la même que la précédente ; et quant à la partie de cette force, qui agirait suivant CN, on n'y ferait point d'attention, à cause qu'elle serait infiniment petite en comparaison de l'attraction du sphéroïde dans cette direction.

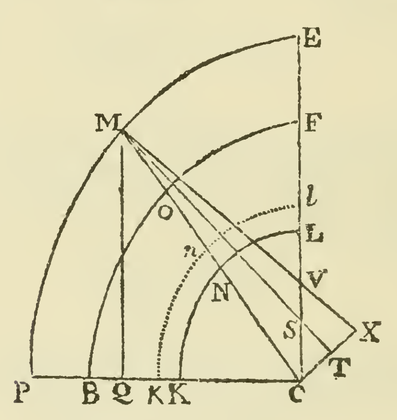
§ XXVIII.

J'appelle *l'ellipticité d'un sphéroïde*, la fraction qu'on a en divisant par l'axe la différence qui est entre l'axe et l'équateur.

§ XXIX.

Supposant qu'un sphéroïde solide, composé d'une infinité de couches elliptiques infiniment peu aplaties ou alongées, dont les densités et les ellipticités sont exprimées par des fonctions données de la distance au centre, soit couvert d'un fluide homogène, qui tourne

avec lui dans un temps tel que la force centrifuge soit infiniment petite par rapport à la gravité ; on se propose 1° de démontrer que ce fluide étant en équilibre, sa surface sera, à un infiniment petit du second ordre près, celle d'un sphéroïde elliptique ; 2° de déterminer les rapports des axes, lorsque celui de la pesanteur à la force centrifuge sous l'équateur sera donné.



Soient *PBC* l'axe du sphéroide et de la rotation, *PME* la surface du fluide supposé en équilibre, *BOF* celle du sphéroïde solide, *KNL*, *knl* deux ellipses infiniment voisines, qui terminent une des

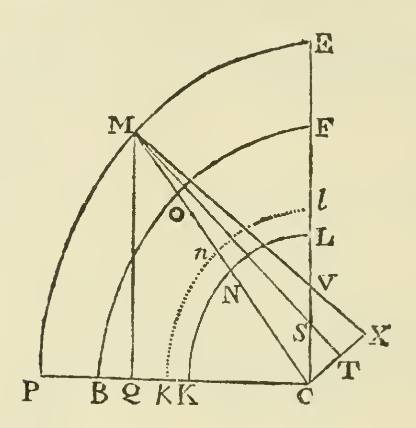
couches quelconques de ce sphéroïde, *CM* un rayon quelconque, QM l'ordonnée au point *M*, *MX* la perpendiculaire à l'ellipse *PME* au même point, *MT* la perpendiculaire à l'ellipse semblable à *KNL* qui passerait par *M*.

Soient de plus .... $CM = x$
$CO = a$
$CN = r$
$QM = q$
l'ellipticité de *PE* .... $= \delta$
celle de *BF* .... $= \alpha$
celle de *KL* .... $= \rho$
la densité de la couche *KNLlnk*... $= R$
la densité du fluide *PBEF* .... $= 1$
On aura par conséquent .... $CV = 2q\delta$
$CS = 2q\rho$

On aura ensuite, par le § XXVI, $\frac{2cr^5}{5} \times CT$ pour l'attraction qu'un sphéroïde *KNL* de la densité 1 exerce sur un corpuscule placé en *M*. Mais si au lieu d'imaginer que le corpuscule *M* soit attiré par une force qui agisse suivant *CX*, on veut qu'il soit attiré suivant *CV* par une force qui fasse le même effet, il est évident

(§ XXVII) que $\frac{2}{5}\,cr^5 . CS$ ou $\frac{4}{5}\,oqr^5\rho$ sera cette force.

Prenant ensuite la différentielle de cette quantité, en faisant r et ρ variables,



cette différentielle sera l'attraction que la couche *KNLlnk* de la densité 1 exerce sur *M*.

Donc.................. $\frac{4}{5}\,cq\int Rd\,(r^5\rho)$

exprimera la force suivant *CV*, équivalente à la somme de toutes les attractions suivant *CV* des différentes couches com-

prises depuis C jusqu'en N. Et par conséquent en nommant . . . . D la quantité que devient $\int Rd\,(r^5\rho)$, lorsque $r = a$ et $\rho = \alpha$,

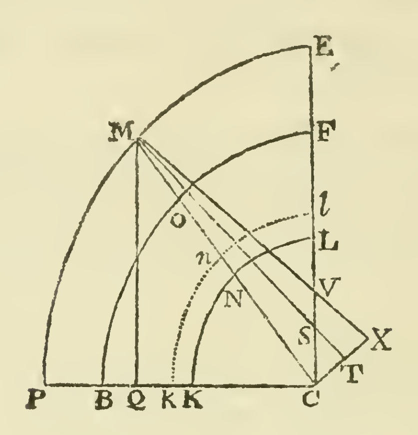
on aura . . . . $\frac{4}{5}\,cqD$

pour la force totale du sphéroïde BOF suivant CV.

Quant à la force de même nature, produite par l'attraction du fluide $PEFB$, elle est la différence des attractions des deux sphéroïdes PME, BOF supposés tous deux de la densité 1. Donc si on fait dans l'expression générale $\frac{4}{5}\,cq\int Rd\,(r^5\rho)$, $R = 1$, et r successivement égal à 1 et à a, ainsi que ρ successivement égal à δ et à α, et qu'on prenne la différence des deux quantités qui viennent par ces substitutions, il viendra $\frac{4}{5}\,cq\delta - \frac{4}{5}\,cqa^5\alpha$ pour la force avec laquelle le fluide tire le corpuscule M suivant CV.

Présentement, par le § XXIII, il est clair que si au lieu du sphéroïde PME composé comme il est, on prenait une

sphère composée de couches concentriques qui eussent les mêmes densités aux mêmes distances du centre, on aurait $2\,c\int Rrrdr$ pour l'attraction, suivant



CM, du globe dont *CM* serait le rayon, et nommant .... *A* ce que devient $\int Rrrdr$, lorsque $r = a$, on aurait $2cA$ pour l'attraction du globe dont *CO* serait le rayon, à laquelle ajoutant $\frac{2}{3}c - \frac{2}{3}ca^3$, valeur de l'attraction de l'orbe *PBFE* supposé sphérique, on

aurait. .... $2cA + \frac{2}{3}c - \frac{2}{3}ca^3$

pour la force totale qui pousserait le corpuscule M vers le centre C, en regardant le sphéroïde comme un globe.

Or comme la force centrifuge n'est supposée ici qu'une infiniment petite partie de la gravité, et que la différence qui serait entre l'attraction du sphéroïde PME, èt celle d'un globe de même rayon, ne peut être qu'infiniment petite par rapport à l'attraction du globe ; il s'ensuit, que si .... φ exprime le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, on aura

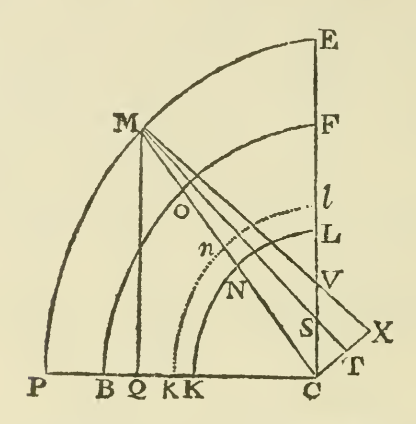
$$2cA\varphi + \frac{2}{3}c\varphi - \frac{2}{3}ca^3\varphi$$

pour la force centrifuge à l'équateur, et par conséquent $2cAq\varphi + \frac{2}{3}cq\varphi - \frac{2}{3}ca^3q\varphi$ pour la force centrifuge en M.

Donc............. $\frac{4}{5}cqD + \frac{4}{5}cq\delta - \frac{4}{5}cqa^5\alpha + 2Acq\varphi + \frac{2}{3}cq\varphi - \frac{2}{3}ca^3q\varphi$

exprime la force totale qui tire *M* dans la direction *CV*.

Mais l'équilibre du fluíde demande que chaque particule *M* de la surface du sphéroïde, soit poussée perpendiculairement à cette surface ; donc il faut



que l'attraction du corpuscule *M* suivant *MC*, soit à la force qui le tire suivant *CV*, comme *CM* à *CV*, c'est-à-dire comme 1 à $2q\delta$. Voyons si cette proportion a lieu, et si elle nous peut donner δ, c'est-à-dire la figure du sphéroïde.

Par les mêmes raisons qu'on a employées en cherchant la force centrifuge,

on pourra prendre encore dans cette occasion $2cA + \frac{2}{3}c - \frac{2}{3}ca^3$ pour l'expression de la force suivant *CM*. Donc la proportion à vérifier est

$$2cA + \frac{2}{3}c - \frac{2}{3}ca^3 : \frac{4}{5}cqD + \frac{4}{5}cq\delta - \frac{4}{5}cqa^5\alpha + 2cAq\varphi + \frac{2}{3}cq\varphi - \frac{2}{3}ca^3q\varphi = 1 : 2q\delta.$$

Or comme la lettre q s'en va d'elle-même, et que c'est la seule quantité qui détermine la position du point M, il s'ensuit que la proportion aura lieu, pourvu qu'on détermine δ convenablement. Cette détermination est bien facile; car A, D, a, α étant des quantités données, il suffit de changer la proportion précédente en équation, et on aura tout de suite

$$\delta = \frac{6D - 6a^5\alpha + 15A\varphi + 5\varphi - 5a}{30A + 4 - 10a^3}$$

Ainsi l'ellipse *PE*, déterminée par cette équation, sera coupée en chacun de ses points par la direction de la pesan-

teur, sous un angle qui ne différera de l'angle droit, que d'un infiniment petit du second ordre, et par conséquent la courbure réelle que doit prendre le fluide, pour être en équilibre, ne différera du sphéroïde PE, que d'un infiniment petit du second ordre.

§ XXX.

Application au sphéroïde homogène.

Dans ce cas, il faut faire $R = 1$ et $\rho = \delta$, $\alpha = \delta$, et partant, $\int Rrrdr = \frac{1}{3} r^3$ et $\int Rd\,(r^5 \rho) = r^5\,\delta$, ce qui donne $A = \frac{1}{3} a^3$, et $D = a^5 \delta$.
Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura........ $\delta = \frac{5}{4} \varphi$.

Si on remarque présentement combien peu cette expression diffère de celle qu'on a donnée au chapitre précédent, § XVII, et dans laquelle on a poussé

l'exactitude si loin, on verra combien il serait superflu de vouloir faire attention aux quantités que nous avons négligées dans la proposition précédente.

§ XXXI.

Application au sphéroïde qu'on suppose renfermer un noyau solide d'une densité homogène, mais différente de celle du fluide qui l'environne.

Que $1+f$ exprime la densité du noyau, en gardant les mêmes dénominations que dans le § XXIX, on aura

$$A = \frac{1}{3} a^3 (1+f), \text{ et } D = a^5 \alpha (1+f).$$

Substituant ensuite ces valeurs dans l'expression générale de δ, on aura

$$\delta = \frac{6a^5 f\alpha + 5a^3 f\varphi + 5\varphi}{10a^3 f + 4}$$

par laquelle on trouvera l'ellipticité du sphéroïde aussitôt qu'on aura donné des valeurs à a, f, α. Et si au contraire δ est donné par observation, on trouvera

facilement des suppositions à faire pour le rayon, pour la densité et pour l'ellipticité du noyau intérieur, qui pourront s'accorder avec la figure de la planète.

Car on n'aura qu'à prendre à volonté deux des trois quantités a, f, α, et la troisième, trouvée par le secours de l'équation précédente, sera nécessairement celle que demande l'équilibre du fluide. Il faudra seulement observer dans ces suppositions,

1° Que α soit toujours une très-petite quantité, c'est-à-dire de l'ordre de δ;

2° Que a soit toujours plus petit que l'unité;

3° Que f n'ait jamais de valeur négative plus grande que l'unité.

§ XXXII.

Supposons, par exemple, que la planète soit plus aplatie que dans le cas de l'homogénéité, et que le noyau soit d'une figure semblable à celle de la planète, on aura $\delta = \alpha = \frac{5}{4}\varphi\ (1+p)$; p

désignant un nombre positif quelconque.

Mettant pour δ et α cette valeur dans la formule précédente, on en tirera

$$f = \frac{-1}{\frac{3}{2p}(a^3 - a^5) + \frac{5}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^5}$$

qui est nécessairement négative. Ainsi, en suivant cette hypothèse, le noyau de la planète doit être moins dense que la matière qui l'environne.

§ XXXIII.

Conditions d'où il résulterait qu'une planète serait creuse.

Dans la même hypothèse, si p est un nombre fini, et que a ne soit surpassé par l'unité que d'une quantité infiniment petite λ, on aura

$$f = \frac{-1}{\frac{3\lambda}{p} + 1}$$

qui montre qu'alors la planète est une calotte infiniment mince, et remplie d'une matière infiniment rare.

Si on voulait que la planète fût une calotte dont l'épaisseur fût une quantité finie et que le milieu fût entièrement vide, il n'y aurait qu'à résoudre l'équation

$$\frac{3}{2p}(a^3 - a^5) + \frac{5}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^5 = 1,$$

et prendre pour a une des racines positives, plus petite que l'unité.

§ XXXIV.

Si on veut que la densité du noyau soit plus grande que celle de la planète, et que $\delta > \frac{4}{5}\varphi$, c'est à-dire que le sphéroïde soit plus aplati que lorsqu'il est homogène, il faut que α soit $> \frac{\delta}{aa}$, et a plus forte raison $> \delta$. Car si on substitue $\frac{\delta + \gamma}{aa}$ pour α, dans la valeur précédente de δ (§ XXXI) on aura

$$\delta = \frac{5}{4}\varphi + \frac{3a^3f}{2a^3f + 2}\gamma,$$

dont le second terme ne saurait être négatif, que γ ne le soit aussi.

§ XXXV.

Réflexions sur les causes, qui, suivant M. Newton, peuvent faire que la Terre et Jupiter n'aient pas les aplatissemens que sa Théorie donne.

On voit par le § précédent, que si on voulait expliquer comment l'ellipticité de la terre pourrait être plus grande que $\frac{1}{230}$, il ne suffirait pas, ainsi que M. Newton le pensait, d'augmenter la densité des parties voisines du centre, car si le noyau était ou sphérique, ou semblable à la surface, ou même plus aplati, pourvu que son ellipticité ne fût pas plus grande que $\frac{\delta}{aa}$, les deux axes seraient entre eux dans une raison moindre que celle de 230 à 231.

De la même manière, on voit combien il était inutile à M. Newton, lorsque sa théorie lui donnait pour Jupiter, une ellipticité moindre que celle qui résulte des observations, d'aller imaginer que

l'équateur de cette planète étant continuellement exposé aux ardeurs du soleil, était plus dense que le reste de la planète. Il n'avait qu'à supposer simplement que le noyau était plus dense que le reste de la planète, et n'avait pas une ellipticité qui passât les bornes que nous venons d'indiquer. Par là il aurait évité de faire pour Jupiter une supposition qui, si elle pouvait avoir lieu dans la nature, ne devrait pas être négligée dans la Terre. En effet, pourquoi la chaleur du soleil condenserait-elle tant l'équateur de Jupiter, sans agir sur celui de la Terre? On verra dans le chapitre suivant, ce qui avait engagé M. Newton à croire que lorsque l'intérieur était plus dense, il fallait que le sphéroïde fût plus aplati.

§ XXXVI.

Conditions qui rendraient une planète alongée.

Si on voulait expliquer comment une planète pourrait être alongée, sans que

l'équilibre des eaux qui la couvrent en fût troublé ; on le pourrait facilement à l'aide d'un noyau intérieur qui serait lui-même alongé. Car il est clair, par la valeur de δ trouvée au § XXXI, que si α est négatif et plus grand que $\frac{5\ (a^3f+1)}{6a^5f}$, δ sera négatif, et que par conséquent le sphéroïde sera alongé.

§ XXXVII.

Réduction de l'équation générale du § XXIX, *dans le cas où l'orbe fluide qui couvre le sphéroïde, est supposé infiniment mince.*

Si on suppose que la profondeur de la mer ne soit en aucun endroit plus grande que la hauteur des montagnes, il est évident qu'on peut, sans erreur sensible, regarder la terre comme un sphéroïde sans inégalités, couvert d'une lame d'eau infiniment mince. Dans cette hypothèse, on aura

$$\alpha = \delta \text{ et } a = 1,$$

ce qui changera l'équation du § XXIX en celle-ci

$$10A\delta - 2D = 5A\phi,$$

par laquelle on déterminera l'ellipticité du sphéroïde, aussitôt qu'on aura choisi la loi suivant laquelle les couches varient, tant en ellipticité qu'en densité.

Lorsqu'on choisira une fonction de r pour exprimer la valeur de ρ, il faudra observer que δ y entre et que ρ soit $= \delta$ lorsque $r = 1$. Il faudra observer encore, comme dans le § XXIX, que δ soit toujours une très-petite quantité, tant que r sera entre 0 et 1, sans quoi les calculs précédens, fondés sur cette supposition, n'auraient plus lieu.

§ XXXVIII.

On tire de l'équation précédente, que *si la densité diminue continuellement depuis le centre jusqu'à la surface, le sphéroïde sera moins aplati que dans le cas de l'homogénéité, à moins que l'ellipticité des couches ne diminue aussi*

depuis le centre jusqu'à la circonférence, et dans une plus grande raison que le carré des distances.

Pour le faire voir, soit fait $\rho = \delta\left(\frac{1}{rr} - u\right)$, la question sera réduite à prouver que u étant une quantité positive, on aura toujours $\delta < \frac{5}{4}\varphi$, ce qui se fera ainsi :

On substituera la valeur précédente de ρ dans $\int Rd\,(r^5\rho)$, ce qui changera cette quantité en $3\delta\int Rrrdr - \delta uRr^5 + \delta\int r^5udR$, et donnera par conséquent $D = 3\delta A - \delta G$, où G représente ce que devient $Rur^5 - \int r^5udR$, lorsque $r = 1$, et est nécessairement une quantité positive, à cause que dR est négatif par l'hypothèse.

Qu'on mette présentement la valeur de D dans l'équation $10\delta A - 2D = 5A\varphi$, on la réduira à $\delta = \frac{5\varphi}{4\left(1 + \frac{G}{2A}\right)}$, c'est-à-dire $\delta < \frac{5}{4}\varphi$.

§ XXXIX.

Usage de l'équation du § XXXVII, *pour résoudre le problème donné dans les Transactions Philosophiques*, n° 449, *page* 292.

Dans ce probléme, $R = fr^p + gr^q +$ etc., et comme toutes les couches sont semblables, on a $\rho = \delta$.

De là il s'ensuit que

$$\int Rrrdr = \frac{f}{3+p} r^{p+3} + \frac{g}{3+q} r^{q+3}, + \text{etc.},$$

et partant, $A = \frac{f}{3+p} + \frac{g}{3+q} +$ etc.;

il s'ensuit encore, que $\int Rd\,(r^5\rho) = \frac{5\delta f r^{5+p}}{5+p} + \frac{5\delta g r^{5+q}}{5+q} +$ etc., ce qui donne $D = 5\delta\left(\frac{f}{5+p} + \frac{g}{5+q} + \text{etc.}\right)$; substituant ensuite ces valeurs dans l'équation $10\delta A - 2D = 5A\varphi$, on aura

$$\frac{\frac{f}{3+p} + \frac{g}{3+q} + \text{etc.}}{\frac{4f}{3+p\,.\,5+p} + \frac{4g}{3+q\,.\,5+q} + \text{etc.}} \times \varphi = \delta$$

équation qui revient au même que celle que j'ai donnée page 292, n° 449 des Transactions Philosophiques, et qui, lorsque f, g, p, q, etc., seront choisis à volonté, donnera aussitôt δ, φ étant connu par l'observation.

§ XL.

Application de l'équation précédente à quelques sphéroïdes examinés par M. Mac Laurin.

Supposons d'abord que le sphéroïde soit composé de couches semblables, dont les densités soient proportionnelles aux distances au centre, il faudra faire $g = 0$ et $p = 1$ dans l'équation précédente, et elle se réduira à $\delta = \frac{3}{2}\varphi$, qui donne (faisant $\varphi = \frac{1}{288}$) pour le rapport des axes de la Terre, celui de 192 à 193.

Supposons ensuite $p = 3$, g étant toujours zéro, on aura $\delta = 2\varphi$, qui montre que, dans cette hypothèse, la Terre au-

rait ses axes dans le rapport de 144 à 145.

Imaginons maintenant que le sphéroïde soit composé de couches semblables, dont les densités augmentent en approchant du centre, et soient proportionnelles aux distances de ces couches à un point fixe pris hors du sphéroïde.

Supposons, de plus, que la distance de ce point fixe à la surface du sphéroïde, soit la partie n de la distance du même point au centre; il est évident qu'il faudra faire dans l'équation précédente

$f = \frac{n}{n-1}$, $p = 0$, $g = -1$, $q = 1$, ce

qui la changera en $\delta = \frac{5}{2}\varphi\left(\frac{n+3}{3n+5}\right)$.

Le premier de ces trois cas est celui que M. Mac Laurin a considéré dans les articles 670, 671, 672, 673 de son Traité des Fluxions, et le rapport des axes de la Terre, que cette hypothèse donne, est, suivant cet auteur, celui de $215\frac{3}{4}$ à $216\frac{3}{4}$.

Le second cas est celui dont il est parlé à la fin de l'article 673, et le rapport des axes qu'on y trouve, est celui de 225 à 226.

Le troisième cas a été traité par M. Mac Laurin, dans les articles 674, 675, 676, 677, et le rapport que cet auteur donne pour l'ellipticité du sphéroïde, est

$$\frac{10}{m}\left(\frac{\overline{n+3}\,.\,\overline{n+2}}{17nn+34nn+45}\right),$$

où il faut observer que $\frac{1}{m}$ est la même quantité que celle que je nomme ici φ.

Voilà donc des résultats entièrement différens de ceux que donne la théorie précédente. La raison de cette différence vient de ce que j'ai considéré l'intérieur du sphéroïde comme solide, et que j'ai cherché quelle doit être la figure de la surface, afin que le fluide qui la couvre soit en équilibre; au lieu que M. Mac Laurin a supposé le sphéroïde fluide, et a déterminé le rapport que devraient avoir les axes, pour que les colonnes qui répondent au pôle et à l'équateur

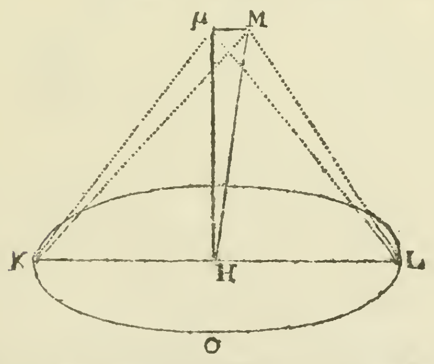
fussent de même poids. Or, que le sphéroïde ait été originairement fluide ou non, il est certain qu'après le durcissement des parties intérieures, il faut, comme avant, que la surface soit coupée perpendiculairement en tous ses points par la direction de la pesanteur. Donc mon équation doit avoir nécessairement lieu, pour que les eaux qui couvrent la surface soient en équilibre. Mais, dira-t-on, pourquoi celle de M. Mac Laurin n'aurait-elle pas lieu aussi ? Est-ce qu'il ne serait pas possible que le sphéroïde eût été originairement fluide, puisque l'équilibre des colonnes ne donne pas la même équation que le niveau de la surface? A cela je réponds qu'il est possible que le sphéroïde ait été originairement fluide, mais que les couches ne pouvaient pas être semblables alors ; on verra au Chap. IV la figure qu'elles doivent avoir dans l'hypothèse de l'entière fluidité du sphéroïde.

CHAPITRE III.

Manière de déterminer la variation de la pesanteur, depuis l'équateur jusqu'au pôle, dans un sphéroïde composé de couches dont les densités et les ellipticités varient d'une manière quelconque du centre à la surface.

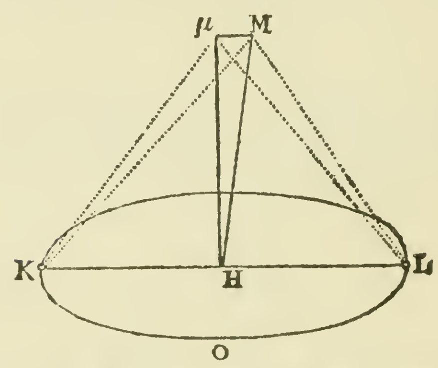
§ XLI.

SOIENT KOL *un cercle*, H *son centre*, μH *une perpendiculaire au plan de ce cercle*, MH *une ligne égale à* μH *et*



faisant un angle infiniment petit avec elle : je dis que l'attraction que le cercle

KOL *exerce sur un corpuscule placé en* M, *peut être prise, sans erreur sensible, pour l'attraction que ce même cercle exerce sur un corpuscule placé en* μ *: ou, ce qui revient au même, que ces deux quantités ne diffèrent l'une de l'autre que d'une quantité infiniment plus petite par rapport à elles, que* μM *ne l'est à l'égard de* Hμ.



Pour le démontrer, il faut faire voir que la somme des attractions que deux corpuscules *K*, *L*, placés aux extrémités d'un diamètre quelconque, exercent sur le corpuscule *M*, peut être regardée comme égale à la somme des attractions que les mêmes corpuscules *K*, *L* exer-

cent sur le corpuscule μ. Or, sans faire le calcul par lequel on trouverait l'attraction que K exerce sur M, on doit comprendre facilement qu'elle est égale à l'attraction qu'il exerce sur μ plus une quantité infiniment petite, dont $M\mu$ est un facteur. On comprendra, de même, que l'attraction de L sur M sera égale à celle qu'il exercera sur μ moins la même quantité infiniment petite. Donc $K+L$ exercera la même attraction en M et en μ, et il en sera de même du cercle entier.

§ XLII.

Si au lieu du cercle KOL, on avait une ellipse ou une autre courbe dont les diamètres fussent partagés en deux parties égales par le centre, il est évident que la proposition précédente serait encore vraie.

§ XLIII.

Si un cercle et une ovale dont l'ellipticité est infiniment petite, ont la même superficie et le même centre, je dis que

leur attraction sur un corpuscule placé au-dessus du centre, sera la même.

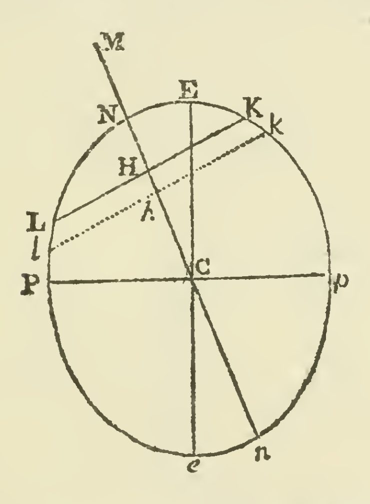
Car si on retranche du cercle et de l'ovale qui a la même superficie, l'espace qui leur est commun, les restes seront des figures dont la largeur sera infiniment petite, et dont tous les points, par conséquent, seront censés à la meme distance du corpuscule attiré, qu'on suppose placé au-dessus du centre.

Donc l'attraction ne dépendra que de la quantité de matière ; or les quantités de matière seront égales par la supposition. Donc, etc.

§ XLIV.

Soit PEpe *un sphéroïde elliptique, dont l'axe de révolution* Pp *diffère infiniment peu du diamètre de l'équateur; je dis que l'attraction que ce sphéroïde exerce sur un corpuscule placé en* M, *est la même que celle qu'exercerait, sur le même corpuscule, un sphéroïde dont* N *serait le pôle*, Nn *l'axe de révolution, et la quantité de matière, la même que celle du sphéroïde* PEpe.

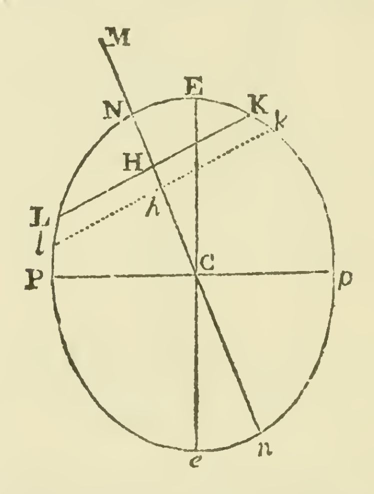
Imaginons que le sphéroïde *PEpe* soit partagé en une infinité de tranches par des plans élevés perpendiculairement sur les ordonnées *LK*, *lk* relatives au diamètre *NCn*, et qu'on fasse mouvoir autour des points *H*, *h*, les plans de toutes ces tranches, ensorte qu'ils deviennent perpendi-



culaires à *Nn*. L'angle *KHC* différant infiniment peu d'un angle droit; il est clair que le solide qu'on aura par le nouvel arrangement des tranches, ne différera du sphéroïde *PEpe*, que d'un infini-

ment petit du second ordre et qu'il sera, par conséquent, censé avoir la même solidité.

De plus, par le § XLII, l'attraction des tranches *KL*, *kl* sur le corpuscule *M* sera la même, soit qu'elles soient infiniment peu obliques au diamètre *CN*,

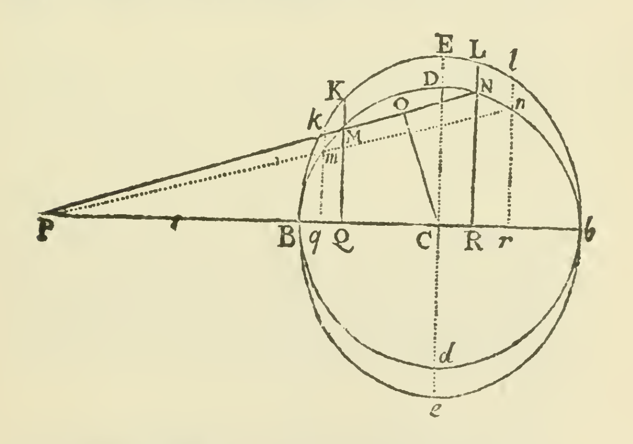


ou qu'elles lui soient exactement perpendiculaires, comme il arrive dans le nouveau solide; mais, par le § XLIII, si on substitue à la place des ellipses que forment les tranches *KL*, des cercles

de même superficie, l'attraction reste encore la même, donc le sphéroïde proposé *PEpe*, et celui qui a la même solidité et le même axe *Nn*, exercent la même attraction sur le corpuscule *M*.

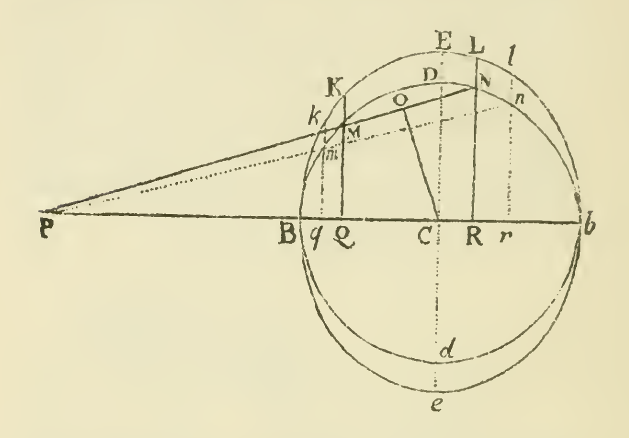
§ XLV.

Trouver l'attraction qu'un sphéroïde BEbe, *dont l'ellipticité est infiniment petite, exerce sur un corpuscule placé en* P *dans l'axe de révolution.*



Ayant inscrit la sphère *BDbd* au sphéroïde, menez par le point *P* deux lignes

quelconques *PMN*, *pmn* qui fassent un angle infiniment petit entre elles, et abaissé des points *M*, *m*, *N*, *n*, les perpendiculaires *KMQ*, *kmq*, *LNR*, *lnr*;



on prendra pour l'élément de l'espace renfermé entre la sphère et le sphéroïde, la somme des deux anneaux produits par la révolution des deux espaces *KMmk*, *NLnl* autour de l'axe.

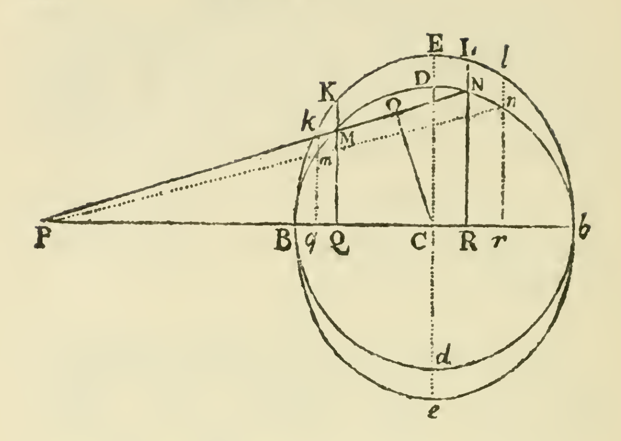
A cause de la petitesse de *MK*, il est clair qu'on pourra supposer tous les points de l'anneau *KMmk* également éloignés

Donc il faudra multiplier la quantité de matière de l'anneau $MKkm$ par $\frac{PQ}{PM^3}$, pour avoir son attraction sur le corpuscule P, et de même la quantité de matière de l'anneau $LNnl$ par $\frac{PR}{PN^3}$, pour avoir son attraction sur le même corpuscule.

Quant à la solidité de l'anneau $MKmk$, elle sera $c.QM.MK.Qq$, ou $c.\frac{ED}{CD}.QM^2.Qq$, à cause que $\frac{MK}{QM}=\frac{DC}{DE}$, par la propriété de l'ellipse. Donc l'attraction de cet anneau sera $c.\frac{ED}{CE}.QM^2.\frac{PQ}{PM^3}.Oq$, ou $c.\frac{ED}{CE}.CO^2.\frac{PO}{PC^3}.Qq$, CO étant perpendiculaire à PN. On aura de même $c.\frac{ED}{CE}.CO^2.\frac{PO}{PC^3}.Rr$, pour l'attraction de l'anneau $LNnl$, et partant

$$c.\frac{ED}{CE}.CO^2.\frac{PO}{PC^3}.d(QR)$$

pour l'attraction des anneaux.



Soient présentement... $CD = CB = r$

$$CP = e$$

l'ellipticité du sphéroïde, ou... $\frac{ED}{CD} = \delta$

$$OO = MN = u$$

et par conséquent $CO = \sqrt{(rr - uu)}$

$$PO = \sqrt{(cc - rr + uu)}$$

$$QR = \frac{2u\sqrt{(ee - rr + uu)}}{e}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente, elle se changera en

$$c\delta du\left(\frac{2eerr - 2r^4}{e^4}\right) + c\delta uudu\left(\frac{6rr - 2ee}{e^4}\right)$$

$$- \frac{4c}{e^4}\delta u^4 du$$

dont l'intégrale

$$c\left(\frac{2e^2r^2 - 2r^4}{e^4}u + \frac{6r^2 - 2e^2}{3e^4}u^3 - \frac{4}{5e^4}u^5\right)\delta$$

exprimera l'attraction que le solide produit par la révolution de l'espace *KMDNLE* exerce sur le corpuscule *P*.

Faisant dans cette valeur $u = r$, et ajoutant $\frac{2cr^3}{3ee}$ qui exprime (§ XXIII) l'attraction de la sphère, on aura

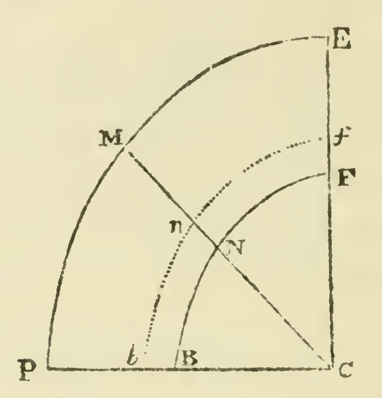
$$\frac{2cr^3}{3ee} + \frac{4cr^3}{3ee}\delta - \frac{4cr^5}{5e^4}\delta$$

pour l'attraction que le sphéroïde BEbe *exerce sur le corpuscule* P.

§ XLVI.

Supposant qu'un sphéroïde soit composé d'une infinité de couches elliptiques, dont les ellipticités et les densités varient d'une manière quelconque, on demande l'attraction que ce sphéroïde

exerce sur un corpuscule placé en un point M *pris à volonté sur la superficie* PME.



Soient le demi-axe... $PC = e$
le rayon de l'équateur... $CE = e + e\delta$
le demi-axe d'une des couches quelconques.... $CB = r$
le rayon de son équateur.. $CF = r + r\rho$
le sinus de l'angle PCM.... $= s$
la densité en B........... $= R$
On verra facilement que $CM = e + ess\delta$
$CN = r + rss\rho$
et que................ $\left(1 - \frac{3}{2}ss\right)\rho$
serait l'ellipticité du sphéroïde qui, ayant

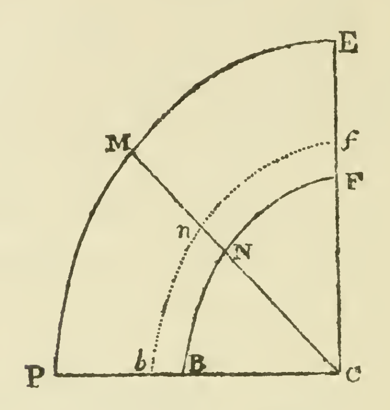
la même solidité que le sphéroïde *BNF*, aurait *CN* pour demi-axe de révolution.

Pour avoir présentement l'attraction en *M*, en supposant le sphéroïde homogène; il faut, suivant le § XLIV, substituer dans l'expression que renferme le § XLV, au lieu de r, $r + r\rho ss$; au lieu de e, $e + e\delta ss$; et au lieu de δ, $\left(1 - \frac{3}{2}ss\right)\rho$; calcul fort simple, puisqu'il ne s'agit que de substituer dans le second terme $\left(\frac{4cr^3}{3ee} - \frac{4cr^5}{5e^4}\right)\delta$, pour δ, $\left(1 - \frac{3}{2}ss\right)\rho$, et d'ajouter au terme $\frac{2cr^3}{3ee}$ sa différentielle, prise en mettant $ess\delta$ pour de, et $rss\rho$ pour dr.

On aura ainsi $\frac{2cr^3}{3ee} - \frac{4cr^3ss}{3ee}\delta + \frac{4cr^3}{3ee}\rho - \frac{4cr^5}{5e^4}\rho + \frac{6cr^5ss}{5e^4}\rho$ pour l'attraction du sphéroïde *BNF* en *M*, la densité étant 1.

Mais comme ce sphéroïde n'est point homogène, et que sa densité varie du centre à la surface suivant la fonction

quelconque R, il faut différentier la quantité précédente, et multiplier la différentielle par R, afin d'avoir l'attraction



d'une couche quelconque $BFfb$. Cette attraction sera par conséquent

$$\frac{2c}{ee} Rrrdr - \frac{4css}{ee} \delta Rrrdr + \frac{4c}{3ee} Rd(r^3\rho) - \frac{4c}{5e^4} Rd(r^5\rho) + \frac{6ss}{5e^4} Rd(r^5\rho),$$

dont l'intégrale sera l'attraction du sphéroïde BNF.

Soient nommées ensuite... A, B, D les quantités que deviennent $\int \frac{Rrrdr}{ee}$,

$\int\frac{Rd(r^3\rho)}{ee}$, $\int\frac{Rd(r^5\rho)}{e^4}$, lorsque $r=e$.

On aura

$$2cA - 4css\delta A + \frac{4c}{3}B - \frac{4c}{5}D + \frac{6css}{5}D:$$

or comme R et ρ sont des fonctions de r, données par les conditions du problême, A, B, et D ne dépendent que des quadratures; donc le problême est résolu.

§ XLVII.

Si on fait dans la valeur précédente $s=0$, on aura $2cA + \frac{4c}{3}B - \frac{4c}{5}D$ pour l'attraction ou la pesanteur d'un corpuscule placé au pôle.

§ XLVIII.

Le sphéroïde précédent tournant autour de son axe, je dis que, quel que soit le temps de sa rotation, la quantité dont la pesanteur au pôle surpassera la pesanteur en un lieu quelconque, sera proportionnelle au quarré du cosinus de la latitude de ce lieu.

Soit φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, par les mêmes raisons que celles qu'on a employées au § XXIX, on aura $2cA\varphi$ pour l'expression de la force centrifuge à l'équateur. Donc la force centrifuge au lieu dont la latitude a pour cosinus s, sera $2csA\varphi$, et partant $2cssA\varphi$, la partie de cette force qui est à déduire de l'attraction pour avoir la pesanteur. Cette déduction étant faite, on aura

$$2cA - 4css\delta A - 2css\varphi A + \frac{4c}{3}B - \frac{4c}{5}D + \frac{6css}{5}D$$

qui exprime la pesanteur en un point quelconque de la surface du sphéroïde.

Si on retranche la quantité précédente, de l'expression de la pesanteur au pôle, donnée au § XLVII, on aura

$$\left(4cA\delta + 2cA\varphi - \frac{6}{5}cD\right)ss$$

pour exprimer la quantité dont la pesanteur au pôle surpasse la pesanteur en un lieu quelconque. Or il est évident que cette quantité est proportionnelle à ss, c'est-à-dire au quarré du cosinus de la

latitude. Ainsi, dans cette occasion, il en est du sphéroïde hétérogene, comme de celui dont la densité est uniforme (§ XIX).

§ XLIX.

Le temps de la rotation du sphéroïde précédent, étant celui qui convient à l'équilibre du fluide placé sur sa surface ; si on appelle, comme ci-dessus, δ l'ellipticité du sphéroïde, et de plus P *la pesanteur au pôle,* Π *la pesanteur a l'équateur, et* ε *l'ellipticité qu'aurait eue le sphéroïde s'il avait été supposé homogène ; je dis que* $\frac{P - \Pi}{\Pi} = 2\varepsilon - \delta$.

Par le § précédent, $4cA\delta + 2cA\varphi - \frac{6}{5}cD$, exprime l'excès de la pesanteur au pôle sur la pesanteur à l'équateur, c'est-à-dire la quantité $P - \Pi$. Il faut donc diviser cette quantité par Π ; mais comme nous négligeons toujours ici les quantités infiniment petites du second ordre ; au lieu de diviser la quantité pré-

cédente par Π, nous pourrons nous contenter de la diviser par $2cA$, qui exprime la pesanteur sur le Globe composé de la même manière que le sphéroïde. Nous aurons donc

$$2\delta + \varphi - \frac{3D}{5A} = \frac{P - \Pi}{\Pi}$$

Si on se rappelle présentement qu'on a prouvé dans le § XXXVII, qu'afin que le fluide placé sur la surface du sphéroïde pût être en équilibre, il fallait que $10\delta A - 2D = 5A\varphi$, on verra qu'on peut mettre dans la quantité précédente $3\delta - \frac{3}{2}\varphi$ à la place de $\frac{3D}{5A}$. La substitution faite, il viendra $\frac{5}{2}\varphi - \delta = \frac{P - \Pi}{\Pi}$. Or $\frac{5}{4}\varphi$ est § XXX, la valeur de ϵ ou de l'ellipticité du sphéroïde homogène : donc $\frac{P - \Pi}{\Pi} = 2\epsilon - \delta$.

§ L.

Manière de trouver la figure de la Terre par le raccourcissement du pendule.

Il suit du § précédent, que si on a trouvé, par expérience, la quantité dont le pendule qui bat les secondes à l'équateur, doit être alongé pour faire ses vibrations dans le même temps au pôle; on aura tout de suite l'ellipticité que doit avoir la Terre, dans l'hypothèse qu'elle soit formée comme nous l'avons supposé. Car ε ou l'ellipticité de la Terre regardée comme homogène, ayant été trouvée (§ XX), de $\frac{1}{230}$, on n'aura qu'à *retrancher de* $\frac{1}{115}$, *la fraction qui exprime le raccourcissement total du pendule depuis le pôle jusqu'à l'équateur, et l'on aura l'ellipticité de la Terre.*

Il est aisé de voir que ce théorème est entièrement contraire à ce que M. Newton a avancé dans la proposition XX du IIIème livre des Principes; car après avoir trouvé que les différentes observations qu'on avait faites sur la longueur du pendule, donnaient plus de $\frac{1}{230}$ pour la diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur; il en conclut, que l'ellipticité de

la Terre devrait être aussi plus grande que $\frac{1}{230}$, au lieu que suivant le théorème précédent, l'ellipticité doit être autant au-dessous de la fraction $\frac{1}{230}$ que le raccourcissement du pendule surpasse cette fraction.

Quant à ce que M. Newton dit dans le même endroit, que les diminutions de la pesanteur qu'on a observées, indiquent une plus grande densité au centre qu'à la superficie, cela se trouve conforme à ma théorie ; car on a vu dans le chapitre précédent, que dans les hypothèses les plus naturelles qu'on puisse former sur la forme des couches intérieures, il arrive toujours, que lorsque les couches les plus denses sont les plus proches du centre, l'ellipticité est plus petite que $\frac{1}{230}$, ce qui, par le § précédent, demande une diminution de pesanteur plus grande que $\frac{1}{230}$

§ LI,

Où l'on fait voir ce qui avait engagé M. Newton à dire que les planètes étant supposées plus denses au centre qu'à la surface, elles devaient être plus aplaties, que si elles étaient homogènes.

Il y a déjà quelques années que j'ai donné dans les Transactions Philosophiques, n° 449, le théorème exposé dans le § L, et que j'ai rapporté à cette occasion les paroles de M. Newton, qui y sont contraires; mais n'ayant pas alors examiné la seconde édition de ses Principes, je n'avais pas pu m'assurer de ce qui avait porté cet illustre auteur à parler ainsi; bien loin de conclure de mon théorème que M. Newton s'était trompé, je pensai seulement que la différence de nos conclusions venait de que l'arrangement que j'avais supposé aux parties intérieures de la Terre, n'était pas celui que M. Newton avait imaginé, et qu'il en avait apparemment pris un tel que sa proposition était vraie. Je m'attachai alors seulement aux

commentateurs de M. Newton, particulièrement à M. Grégory ; et je fis voir que l'explication qu'il donne des paroles de M. Newton était fausse, en ce qu'elle était fondée sur une proposition qui n'avait pas lieu dans le cas où il l'appliquait. Car cette proposition qui apprend que les pesanteurs en différens lieux de la Terre, sont en raison renversée de la distance au centre, n'est vraie que lorsque la Terre est supposée homogène, et ne saurait, par conséquent, être employée dans le cas où l'on suppose que les parties voisines du centre, ont des densités différentes de celles qui sont vers la surface.

Depuis que j'ai reconnu que le théorème, dont j'avais donné la démonstration dans les Transactions Philosophiques, pour le cas où les couches sont semblables, s'appliquait à une infinité d'autres cas, j'ai remis plus de soin à chercher ce qui pourrait avoir engagé M. Newton à penser que la Terre devrait être d'autant plus plate, que la pesanteur diminuait plus du pôle à l'équateur ; je crois l'avoir trouvé dans la seconde édition, et que

c'est pour s'être fondé sur le même argument que M. Gregory. Voici ce qui me fait penser ainsi.

Dans la page 386, M. Newton, après avoir remarqué que les expériences donnaient 2 lignes de diminution dans la longueur du pendule du pôle à l'équateur, dit, que, puisque la supposition de l'homogénéité n'a donné que $1 \frac{87}{1000}$ lig., il faut augmenter, dans la même raison de $1 \frac{87}{1000}$ à 2, la différence $17 \frac{1}{6}$ milles des deux axes, qui résultait de la même supposition de l'homogénéité, et qu'on aura $31 \frac{7}{12}$ milles pour la différence réelle. Car, ajoute-t-il, le retardement du pendule à l'équateur, prouve la diminution de la gravité dans ce lieu, et plus la matière y sera légère, plus elle devra être haute, afin de faire équilibre avec celle du pôle.

Plus loin, p. 387. En examinant les mesures des degrés de latitude de la

France, faites par M. Cassini, il dit que ces mesures supposant la Terre plus haute au pôle qu'à l'équateur d'environ 95 milles, il faudrait que le pendule fût plus long à l'équateur qu'au pôle d'environ $\frac{1}{2}$ pouce. Tout cela prouve, ce me semble, que M. Newton pensait, que dans tous les cas, la pesanteur devait être en raison renversée des rayons, afin que les colonnes fussent en équilibre : or j'espère qu'on trouvera suffisamment prouvé par les § XVIII et XLIX, que cette proposition n'est démontrée que dans le cas de l'homogénéité, et qu'elle n'est pas vraie en général. Ainsi l'argument que je faisais dans les Transactions Philosophiques, contre M. Gregory, a lieu aussi contre M. Newton.

§ LII.

Remarques sur l'hypothèse dont M. Mac Laurin parle dans les articles 666 *et* 681 *de son Traité des Fluxions.*

M. Mac Laurin ayant parcouru différentes hypothèses où il suppose la Terre remplie de matière jusqu'au centre, et ayant trouvé que dans toutes ces hypothèses, lorsque l'ellipticité était plus grande que la fraction $\frac{1}{230}$, le pendule devait être raccourci du pôle à l'équateur d'une quantité moindre que cette même fraction, cherche ce qui résulterait de l'hypothèse où la Terre serait creuse avec un noyau au centre (1). Dans l'exemple qu'il choisit, il suppose que les deux surfaces de la croûte soient semblables, et que le noyau soit sphérique, la densité de l'une et de l'autre étant la même, il trouve alors que la terre pourrait avoir une ellipticité plus grande que $\frac{1}{230}$, quoique le raccourcissement du pendule fût aussi plus grand que $\frac{1}{230}$, ce qui est contraire au théorème que je viens de donner; car l'espace qui est

(1) C'est l'hypothèse que M. Halley avait imaginée pour expliquer les phénomènes de l'aimant.

renfermé entre la croûte et le noyau, pouvant être regardé comme une couche dont la densité serait nulle, l'ellipticité ajoutée au raccourcissement du pendule devrait toujours égaler $\frac{1}{115}$.

Ce qui fait que le calcul de M. Mac Laurin ne s'accorde pas avec mon théorème, c'est que la méthode de cet auteur consiste à égaler les poids des deux colonnes de fluide qui mesurent l'épaisseur de la croûte à l'équateur et au pôle. Or, pour appliquer cette méthode, il faut considérer le sphéroïde de M. Mac Laurin comme ayant été originairement fluide, soit qu'on suppose vide l'espace renfermé entre la croute et le noyau, soit qu'on le suppose rempli d'une matière qui n'attire point. Dans le premier cas, je dis que la croûte ou plutôt l'orbe fluide tomberait sur le noyau, et ne formerait avec lui qu'un seul sphéroïde homogène, dont l'ellipticité serait de $\frac{1}{230}$. Dans le second cas, je prétends que l'équilibre de l'orbe fluide ne suit pas de l'égalité des poids des deux colonnes qui me-

surent l'épaisseur de l'orbe au pôle et à l'équateur, mais que cet équilibre demande nécessairement que la surface intérieure et la surface extérieure de l'orbe fluide, soient coupées perpendiculairement en tous leurs points par la direction de la pesanteur ; ce qui ne saurait arriver, si ces deux surfaces sont semblables. Donc la méthode de M. Mac Laurin ne saurait s'appliquer au sphéroïde qu'il propose. Si on veut que ce sphéroïde soit possible, il faut supposer la croûte dure et couverte seulement d'une lame d'eau infiniment mince ; et alors, au lieu du résultat de M. Mac Laurin, on trouvera celui que demande le § *L*.

Au reste, je dois rendre à M. Mac Laurin la justice de dire qu'il n'a pas insisté sur son hypothèse, qu'il a dit lui-même, dans l'article 681, que l'égalité des poids des deux colonnes qui mesurent l'épaisseur de la croûte au pôle et à l'équateur, pourrait bien n'être qu'une supposition arbitraire.

§ LIII.

De la variation de la pesanteur sur un sphéroïde alongé.

J'ai démontré dans le chapitre précédent, au § XXXVI, que le fluide qui couvrirait la surface d'un sphéroïde alongé pourrait demeurer en équilibre, si ce sphéroïde avait un noyau qui fût lui-même alongé, et qui eût ses axes dans un rapport convenable : on va voir présentement que dans cette même hypothèse on expliquerait très-bien le raccourcissement du pendule du pôle à l'équateur. Car il vient d'être prouvé dans le § L, que δ étant l'ellipticité de la Terre $\frac{1}{115} - \delta$ était le raccourcissement du pendule; or, qu'on fasse δ négatif, on aura donc $\frac{1}{115} + \delta$ pour le même raccourcissement, ce qui montre que la diminution de pesanteur en allant vers l'équateur, serait plus sen-

sible sur le sphéroïde alongé, que sur les phéroïde aplati.

Au reste, si je fais cette observation, ce n'est pas pour jeter le moindre soupçon sur les mesures par lesquelles on a trouvé la Terre aplatie; car outre que ces mesures ont été faites avec une précision hors de toute atteinte, il est à observer que la remarque précédente ne saurait lever la difficulté qu'on avait de concilier l'alongement de la Terre avec le raccourcissement du pendule, qu'elle ne jette les partisans de l'alongement de la Terre dans un nouvel embarras beaucoup plus considérable que le premier. Supposons, par exemple, avec M. Cassini, que la Terre fût un sphéroïde alongé, dont l'ellipticité fût de $\frac{1}{93}$, δ serait donc $= -\frac{1}{93}$, ce qui donnerait, suivant le § L, la quantité $\frac{1}{93} + \frac{1}{115}$ ou $\frac{1}{51}$; c'est-à-dire environ 8 ou 9 lignes pour le raccourcissement du pendule du pôle à l'équateur: mais les observations les plus exactes s'accordent toutes à donner

environ 2 lignes pour ce raccourcissement, il faudrait donc avoir commis une erreur de 6 ou 7 lignes, ce qui est de toute impossibilité.

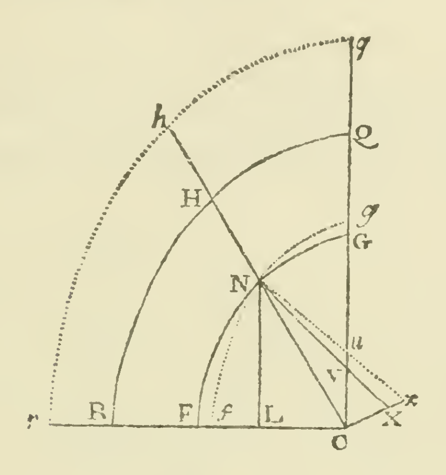
CHAPITRE IV.

Détermination de la figure de la Terre, en supposant qu'elle n'ait eu au commencement aucune partie solide, mais qu'elle ait été un amas d'une infinité de fluides de différentes densités.

§ LIV.

SOIT rqQR *un orbe elliptique, ou la différence entre deux sphéroïdes* rq, RQ *dont les demi-axes sont* rC, RC *et les rayons de l'équateur* Cq, CQ, *je dis que si* δ *exprime l'ellipticité du plus grand sphéroïde, et* ε *celle du plus petit,* $\frac{4c}{5}$ LN ($\delta - \varepsilon$) *sera l'expression d'une force, qui, tirant le corpuscule* N *suivant*

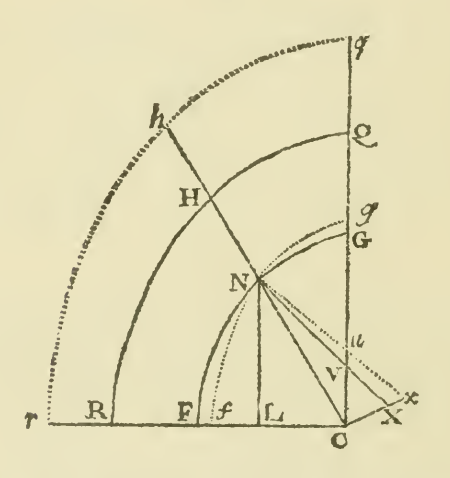
CQ, *ferait le même effet que l'attraction de l'orbe* rqQR *dans la direction* CX *perpendiculaire à* CN.



Ayant fait passer par le point *N*, deux sphéroïdes *FNG*, *fNg*, le premier semblable au sphéroïde *RHQ*, et le second semblable au sphéroïde *rhq* ; on reconnaîtra facilement que l'attraction de l'orbe *rqQR* sera l'attraction du sphéroïde *fNg*, moins celle du sphéroïde *FNG*.

Si on mène ensuite *Nx*, et *NX* per-

pendiculaires à ces deux sphéroïdes, on verra, par le § XXVII, qu'on pourra substituer au lieu des deux attractions suivant CX, deux forces agissant suivant CV, et exprimées par $\frac{2}{5}c.CV$, et $\frac{2}{5}c.Cu$. Retranchant donc ces deux quantités l'une de l'autre, et substituant à



la place de CV et de Cu leurs valeurs $2\varepsilon.LN$ et $2\delta.LN$, on aura $\frac{4}{5}c.LN(\delta-\varepsilon)$ pour la force suivant CV, équivalente

à l'attraction que l'orbe $rqQR$ exerce suivant CX sur le corpuscule N.

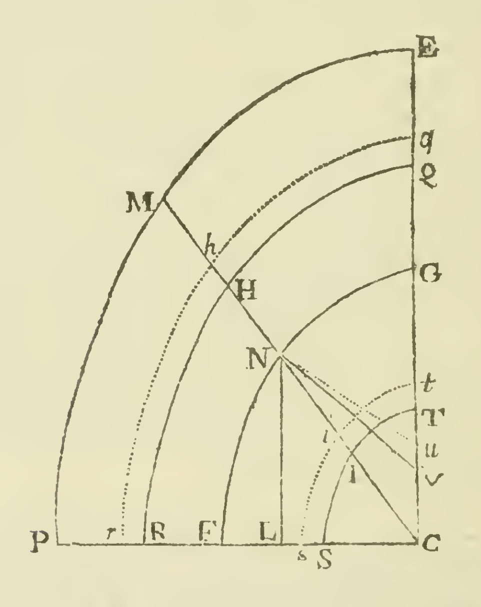
§ LV.

Supposant qu'un globe fluide composé d'une infinité de couches sphériques, dont les densités sont prises à volonté, vienne à tourner autour d'un de ses diamètres ; on se propose 1° de démontrer que lorsque cette masse fluide sera en équilibre, sa superficie et celle de toutes les couches qui la composent seront, sans erreur sensible, des surfaces de sphéroïdes elliptiques, si la rotation est telle qu'à l'équateur la force centrifuge soit une très-petite partie de la pesanteur ; 2° de déterminer, dans la même supposition, la relation qui doit être entre la fonction qui exprime la loi des densités, et celle qui exprime la variation des ellipticités des couches.

Par les principes établis dans la première partie, § LXVI, le sphéroïde ne saurait être en équilibre, à moins que toutes les forces qui agissent sur une par-

ticule quelconque *M* prise dans l'intérieur du sphéroïde, étant réduites à une seule, cette particule ne soit tirée dans une direction perpendiculaire en *N* à la couche *FNG*, qui est de même densité que cette particule.

Cherchons donc quelles sont toutes ces forces, et nous trouverons



1°. Une force dirigée vers *C*, venant de l'attraction de l'ellipsoïde *FNG*, la-

quelle pourra être prise sans erreur sensible en cette occasion, pour ce qu'elle serait, si le sphéroïde se rétablissait en globe comme on suppose qu'il était avant sa rotation.

2°. La force suivant *CV*, équivalente à l'attraction du sphéroïde *FNG* suivant la perpendiculaire *CN*.

3°. La force suivant la même direction, causée par l'attraction de l'orbe *PFEG*.

4°. La force centrifuge en *N*, qui est à la force centrifuge à l'équateur, comme *LN* à *CE*.

Faisant comme ci-dessus.... $CP = 1$

$CF = r$

la densité en *F*, et dans toute la couche *FNG* .... $= R$

l'ellipticité du sphéroïde total..... $= \delta$

celle de la couche quelconque *FNG*.............................. $= \rho$

l'ordonnée *LN*.................. $= q$

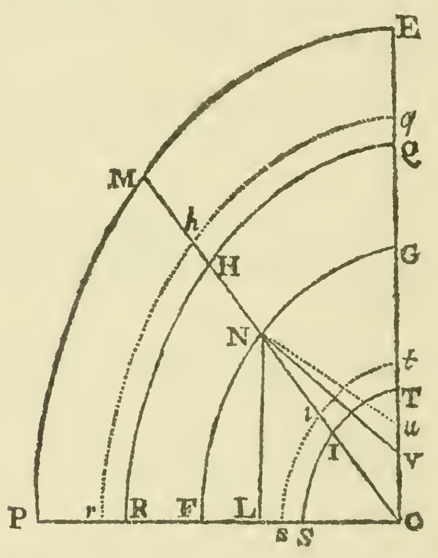
le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur...... $= \varphi$

on aura par le § XXIII la quantité

$$\frac{2c}{rr}\int Rrrdr$$

pour exprimer la force de N vers C.

Quant à la force suivant CV, équivalente à l'attraction du sphéroïde FNG



suivant la direction perpendiculaire à CN, pour la trouver, nous commencerons par supposer le sphéroïde SIT d'une densité homogène exprimée par l'unité;

et par le § XXVII, l'expression de la force suivant CV, que ce sphéroïde exercerait par son attraction, serait

$$\frac{2}{5} c \cdot \frac{CI^5}{CN^5} \cdot CV;$$

en supposant que NV fût perpendiculaire à l'ellipse semblable à SIT qui passerait par N.

Prenant donc ρ pour l'ellipticité de SIT, et r pour CS ou CI, on aura $\frac{4}{5} c \cdot \frac{LN}{CN^5} \cdot r^5 \rho$ pour la force suivant CV du sphéroïde homogène SIT. Cela posé, on verra facilement qu'une couche $SstT$ de la densité 1, qui serait la différence entre le sphéroïde SIT et un autre sphéroïde sit dont l'ellipticité serait supposée $\rho + d\rho$, et le demi-axe $r + dr$, donnerait $\frac{4}{5} c \cdot \frac{LN}{CN^5} d(r^5 \rho)$ pour la force suivant CV, qu'elle exercerait sur N. Donc en multipliant cette quantité par R et intégrant, on aura

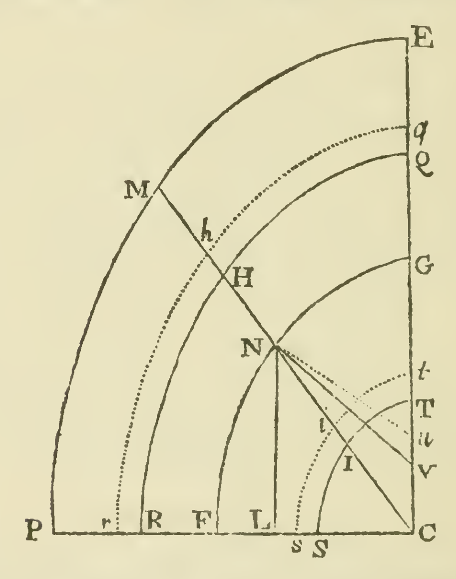
$$\frac{4}{5} c \cdot \frac{LN}{CN^5} \int R d(r^5 \rho)$$

pour la force suivant CV, qu'exerce sur le corpuscule N, le sphéroïde SIT, non

homogène, comme nous l'avons supposé d'abord, mais tel qu'il est donné par les conditions du problème. Et si on met dans cette valeur, au lieu de LN sa valeur q, et au lieu de CN sa valeur r, on aura

$$\frac{4cq}{5r^5}\int Rd\,(r^5\rho)$$

pour la force que le sphéroïde FNG



exerce sur N dans la direction CV, en supposant que r et ρ soient les quantités

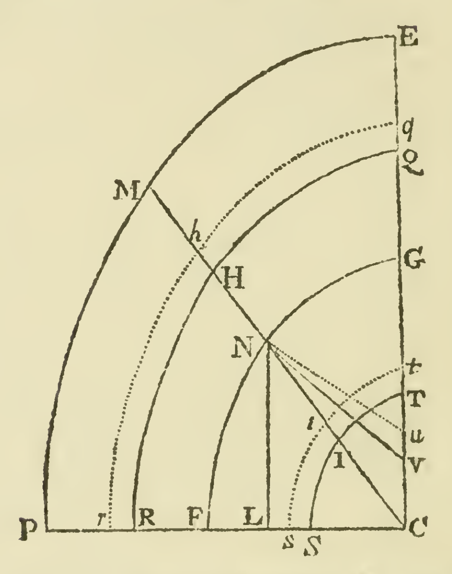
qui conviennent au point N, au lieu du point I.

Venons présentement à la force, suivant la même direction, causée par l'attraction de l'orbe $PEGF$. Par le § LIV, nous trouverons que l'attraction d'un orbe $RrQq$ de la densité 1 sur le corpuscule N, sera $\frac{4}{5} c \cdot LN \cdot d\rho$, en prenant ρ pour l'ellipticité de RQ, et $\rho + d\rho$ pour celle de rq. Donc en supposant que cet orbe ait pour densité R, sa force suivant CV sera $\frac{4c}{5} \cdot LN \cdot Rd\rho$, dont l'intégrale exprimera l'attraction de l'orbe $PEQR$; mais comme cette attraction diminue lorsque r augmente, il s'ensuit que si .... F représente ce que devient $\int Rd\rho$, lorsque r devient 1, $\frac{4c}{5} \cdot LN\,(F - \int Rd\rho)$ représentera la force suivant CV de l'orbe $PEQR$.

Donc en mettant q au lieu de LN, et en supposant que r et ρ soient les quantités qui conviennent au point N au lieu du point H,

$$\frac{4c}{5}\, qF - \frac{4c}{5}\, q\int R d\rho$$

exprimera la force suivant *CV* causée par l'attraction de l'orbe *PEGF*.



Il ne reste donc plus que la force centrifuge en *N*, son expression se trouvera comme dans le § XXIX, et sera

$$2cAq\varphi,$$

A étant ce que devient $\int Rrrdr$, lorsque $r = 1$, et $2cA$, par conséquent, l'attraction ou la pesanteur sur le globe.

Présentement, les conditions du problême demandent que la force suivant CN soit à la somme des forces qui agissent dans la direction CV, comme CN à CV, c'est-à-dire comme r à $2q\rho$, donc il faut que

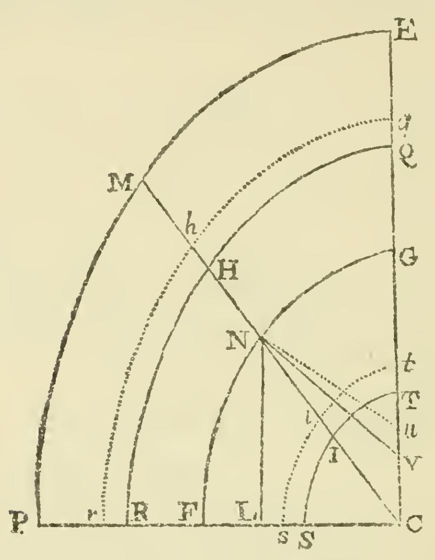
$$\frac{2c}{rr}\int Rrrdr : \frac{4c}{5r^5}\,q\int Rd\,(r^5\rho) + \frac{4c}{5}\,qF - \frac{4c}{5}\,q\int Rd\rho + 2cAq\phi = r : 2q\rho$$

or la lettre q se détruisant d'elle-même dans cette proportion, il s'ensuit que pourvu que ρ et R aient entre eux la relation exprimée par l'équation

$$5r^2\rho\int Rrrdr = \int Rd\,(r^5\rho) + Fr^5 + \frac{5}{2}Aq\phi r^5 - r^5\int Rd\rho$$

et que ρ soit toujours une quantité infiniment petite depuis la supposition de $r=0$ jusqu'à celle de $r=1$, chacune des ellipses FNG sera coupée en tous ses points par la direction de la pesanteur, sous un angle qui ne différera de l'angle droit que d'un infiniment petit du second ordre, en supposant que la force centri-

fuge soit un infiniment petit du premier à l'égard de la gravité. Donc les courbes réelles qui doivent être les méridiens des couches *FNG*, dans la même sup-



position, ne s'éloignent que d'un infiniment petit du second ordre, des ellipses déterminées par l'équation précédente. Et lorsque dans une planète la force centrifuge sera fort petite par rapport à la gravité, on pourra, sans aucune erreur sensible, appliquer les calculs précédens

à la recherche de la figure de cette planète.

Pour pouvoir faire usage de cette solution, il faut supposer que l'une des deux quantités R ou ρ est donnée, et chercher l'autre par le secours de l'équation précédente ; c'est-à-dire, qu'on peut également, ou chercher les ellipticités que les couches doivent avoir lorsque leurs densités sont données, ou chercher les densités des couches quand leurs ellipticités sont supposées connues.

§ LVI.

Examen de l'équation $5r^2\rho\int Rrrdr = \int Rd\,(r^5\rho) + Fr^5 + \frac{5}{2}A\varphi r^5 - r^5\int Rd\rho$, *lorsque* R *est donné.*

Je commence par différentier cette équation, ce qui me donne en réduisant

$$\frac{rd\rho + 2\rho dr}{r^3dr}\int Rrrdr = F + \frac{5}{2}A\varphi - \int Rd\rho$$

je différentie encore cette équation, en supposant dr constant, et j'en tire

$$ddp = pdr^2\left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right) - \frac{2Rrrdr}{\int Rrrdr}dp,$$

qui en faisant. . . . . $p = c^{\int udr}$
devient

$$du + u^2dr = -\frac{2uRrrdr}{\int Rrrdr} + dr\left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right)$$

qui devient enfin

$$dt + ttdr = \frac{rrdR}{\int Rrrdr} + \frac{6dr}{rr}$$

en faisant. . . . . $u + \frac{Rrr}{\int Rrrdr} = t$;

d'où l'on voit que l'équation $5r^2p\int Rrrdr = \int Rd(r^5p)$ + etc. retombe dans le cas de la fameuse équation $dy + y^2dx = Xdx$ (X étant une fonction de x) dont personne, que je sache, n'a encore pu séparer les indéterminées en général. Ainsi excepté le seul cas où $R = r^n$, dans lequel la difficulté de l'équation $dy + y^2dx = Xdx$ n'a pas lieu, je ne m'arrêterai point à la recherche des ellipticités par le moyen des densités.

§ LVII.

Intégration de l'équation précédente, lorsque $R = r^n$, *ou détermination de la*

figure du sphéroïde et des couches qui le composent, lorsque la densité est proportionnelle à une puissance quelconque de la distance au centre.

Ayant mis r^n à la place de R dans l'équation précédente, elle se change en

$$dt + ttdr = \frac{nn + 3n + 6}{rr} dr$$

qui devient homogène en égalant $\frac{1}{r}$ à une nouvelle variable, et n'a, par conséquent, aucune difficulté.

L'intégration faite, on a

$$t = \frac{\frac{1}{2} + q}{r} - \frac{2qar^{-2q-1}}{ar^{-2q} + 1},$$

où $q = \sqrt{\left(nn + 3n + \frac{25}{4}\right)}$, et a est une constante venue par l'intégration.

Substituant ensuite cette valeur de t dans $\frac{c^{\int tdr}}{\int Rrrdr}$, c'est-à-dire dans l'expression de ρ qui résulte des deux tranformées $c^{\int udr} = dr$, et $u = t - \frac{Rrr}{\int Rrrdr}$ du § précé-

dent, on aura

$$\rho = \delta a r^{-n-\frac{1}{2}-\sqrt{(nn+3n+\frac{25}{4})}} + \delta r^{-n-\frac{1}{2}+\sqrt{(nn+3n+\frac{25}{4})}},$$

δ étant la constante que demande l'intégration $\int t dr$.

Cette valeur de ρ étant celle que donne l'équation $dd\rho = \rho dr^2 \left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right) - \frac{2Rrrdr}{\int Rrrdr} d\rho$, on ne pourra pas manquer de résoudre par son moyen l'équation..... $5r^2\rho\int Rrrdr = \int Rd(r^5\rho) + Fr^5 + \frac{5}{2}\varphi A r^5 - r^5\int Rd\rho$, d'où cette équation différentielle était venue, pourvu qu'on donne aux constantes a et δ les valeurs nécessaires pour que les termes F et $\frac{5}{2}\varphi A$ s'évanouissent avec les autres dans la substitution de la valeur de ρ; condition qui ne demande autre chose, sinon que a et δ aient entre eux la relation exprimée par l'équation

$$\delta\left(q - \frac{1}{2} - n\right) - \delta a\left(q + \frac{1}{2} + n\right) = \frac{5}{2}\varphi.$$

Revenons présentement au problème dont la solution avait amené l'equation $5r^2\rho\int Rrrdr=$etc.; il consiste dans cet exemple à trouver la figure qu'un globe fluide du rayon 1, et composé d'une infinité de couches dont les densités aux distances r du centre sont exprimées par r^n, doit prendre en tournant dans un temps tel que la force centrifuge à l'équateur soit la partie φ de la pesanteur. Il est aisé de voir que cette figure doit être déterminée. Cependant on en trouverait une infinité par la résolution de l'équation précédente. Car n'ayant pour déterminer a et δ qu'une seule équation, l'une de ces deux quantités demeurera toujours indéterminée dans la valeur de ρ, c'est-à-dire dans la valeur de l'ellipticité du sphéroïde.

Pour lever cette difficulté, d'autant plus essentielle qu'elle n'est pas particulière à cet exemple, il faut se ressouvenir que les propositions d'où l'on a tiré la solution précédente, ne sont exactes qu'en supposant que les couches ne diffèrent que très-peu de la figure sphé-

rique, c'est-à-dire que ρ ne doit être jamais qu'une très-petite quantité. Remarquant ensuite que n doit être négatif, afin que la densité diminue du centre à la surface, ainsi que les lois de l'hydrostatique le demandent ; on verra que des deux termes que contient la valeur de ρ, il n'y a que le terme

$$\delta r^{-n-\frac{5}{2}+\sqrt{(nn+3n+\frac{25}{4})}}$$

qui puisse convenir à notre probléme, quoique tous les deux satisfassent à l'équation $5r^2\rho\int Rrrdr$, = etc. Car comme terme

$$\delta a r^{-n-\frac{5}{2}-\sqrt{(nn+3n+\frac{25}{4})}},$$

aura toujours son exposant négatif ; il donnera nécessairement de grandes ellipticités pour les couches voisines du centre, et empêchera, par conséquent, les propositions précédentes d'avoir lieu.

Cela posé, il faudra que la constante a, venue de la première intégration, soit nulle ; d'où l'équation que nous avions entre a et δ, deviendra

$$\delta\left(q-\frac{1}{2}-n\right)=\frac{5}{2}\varphi,$$

qui donne

$$\rho = \frac{5\varphi}{2q - 1 - 2n} r^{q - n - \frac{1}{2}}$$

pour la valeur générale des ellipticités des couches, et qui est déterminée, puisque n et φ sont données.

La manière dont je viens de lever la difficulté occasionnée par les deux intégrations de l'équation $dd\rho = \rho dr^2 \left(\frac{6}{rr} - \text{etc.}\right.$ sera la même dans tous les autres exemples.

§ LVIII.

Si on voulait que n fût positif, c'est-à-dire que les densités allassent en augmentant du centre à la surface, ce qu'on peut toujours faire en regardant le problème comme purement géométrique, la valeur de ρ qu'on vient de donner, serait encore la vraie, quoiqu'elle donnât des ellipticités finies pour les couches voisines du centre. Pour en voir la raison, il faut remarquer qu'en multipliant cette valeur de ρ par r, le produit

$$\frac{5\varphi}{2q - 1 - 2n} r^{q - n - \frac{1}{2}}$$

qui exprimerait la différence des axes de ces couches, serait toujours une très-petite quantité, de manière que ces premières couches seraient toujours très-petites, quoique fort aplaties. Or comme leurs densités seraient presque nulles par l'hypothèse, il importerait peu que les propositions par lesquelles on a les attractions des sphéroïdes, puissent s'y appliquer, puisqu'en retranchant tout-à-fait ces premières couches, il n'en résulterait pas d'erreur sensible dans la détermination des axes.

§ LIX

Examen de l'équation $5r^4\rho\int Rrrdr = \int Rd(r^5\rho) +$ etc., *lorsque* R *est l'inconnue, ou, ce qui revient au même, manière de trouver la loi des densités, lorsque celle des ellipticités est donnée.*

Je reprens l'équation

$$dd\rho = \rho dr^2\left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr^3}{\int Rrrdr}\right) - \frac{2Rrrdr}{\int Rrrdr}d\rho$$

et je lui donne cette forme

$$\frac{-r^2 dd\rho + 6\rho dr^2}{2r^2 d\rho + 2r\rho dr} = \frac{Rrrdr}{\int Rrrdr},$$

dans laquelle je remarque que le premier membre est une fonction donnée de r, puisque les conditions du problème donnent la valeur de ρ en r : faisant ensuite

$$\frac{-r^2 dd\rho + 6\rho dr^2}{2r^2 d\rho + 2r\rho dr} = \mathrm{P}dr,$$

l'équation à intégrer est

$$\mathrm{P}dr = \frac{Rrrdr}{\int Rrrdr},$$

d'où l'on tire facilement

$$R = \frac{\mathrm{P}}{rr}\, c^{\int \mathrm{P}dr}$$

par laquelle on trouvera la densité cherchée R, aussitôt qu'on aura fait une supposition pour la valeur de ρ, et qu'on en aura tiré la fonction P.

§ LX.

Lorsqu'on veut appliquer cette théorie à une planète dont la figure est don-

née par observation, et dans laquelle la force centrifuge est connue ; il paraît d'abord qu'il suffit de prendre pour ρ une fonction de r qui devienne l'ellipticité observée, lorsque $r=1$, et de substituer cette valeur de ρ dans la valeur générale de R qu'on vient de donner : mais si on fait attention que cette valeur de R n'est tirée que d'une équation venue par la seconde différentiation de l'équation $5r^2\rho\int Rrrdr =$ etc. et que, dans cette seconde différentiation, la constante qui désignait la force centrifuge est évanouie, on verra que les valeurs de R et de ρ, qui résoudraient l'équation $dd\rho = \rho dr^2\left(\frac{6}{rr} - \text{etc.}\right.$, ne résoudraient pas l'équation

$$5r^2\rho\int Rrrdr = \text{etc.},$$

à moins qu'on n'eût laissé dans la valeur de ρ une lettre arbitraire dont la détermination se fît ensuite par cette condition, qu'en substituant pour R et pour ρ leurs valeurs dans l'équation $5r^2\rho\int Rrrdr =$ etc., les termes constans s'évanouissent en même temps que les autres.

Comme la substitution des valeurs de R et de ρ dans cette équation, demanderaient de grands calculs : il est à propos de chercher à déterminer cette lettre arbitraire renfermée dans ρ, par une méthode qui soit telle, que sans faire les substitutions de R et de ρ, on soit sûr que lorsqu'on les fera, tous les termes s'évanouiront.

Pour trouver cette méthode, on remarquera d'abord que l'équation

$$\frac{rd\rho + 2\rho dr}{r^3dr}\int Rrrdr = F + \frac{5}{2}\varphi A - \int Rd\rho,$$

venue (§ LVI) par la première différentiation de l'équation $5r^2\rho\int Rrrdr =$ etc., ne peut pas convenir à d'autre sphéroïde qu'à celui auquel l'équation, $5r^2\rho\int Rrrdr =$ etc. appartient.

On observera ensuite dans cette équation, que la quantité $F - \int Rd\rho$ doit s'évanouir lorsque $r = 1$: de plus, que $\int Rrrdr$ devient $= A$ dans la même supposition. Cela posé, on verra facilement que pour déterminer la lettre arbitraire laissée dans la valeur de ρ, il suffira de faire ensorte que la quantité $\frac{rd\rho + 2\rho dr}{rdr}$ devienne $\frac{5}{2}\varphi$,

lorsque $r = 1$, ce qui est extrêmement facile.

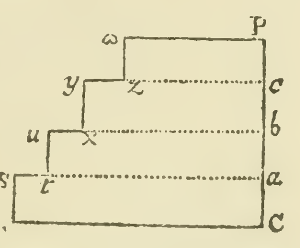
Ainsi, lorsque la valeur qu'on aura prise pour ρ remplira cette condition, et que d'ailleurs elle deviendra l'ellipticité observée lorsqu'on fera $r = 1$, on n'aura qu'à substituer cette valeur de ρ dans l'expression générale de R donnée dans le § précédent, et pourvu que la valeur de R qu'on aura par là soit toujours positive, et sa différence toujours négative dans toutes les valeurs de r comprisec entre 0 et 1, on sera sûr d'avoir fait une hypothèse qui s'accorde avec les observations et avec les lois d'hydrostatique.

§ LXI.

Supposant qu'un sphéroïde fluide composé d'un nombre fini de couches dont les densités sont données, tourne autour de son axe, et soit en équilibre, on demande son ellipticité et celle de toutes ses couches.

Ce problème peut être regardé comme un cas du § LV et la solution s'en tire-

rait tout de suite, si on avait pu trouver une construction générale de l'équation $5r^2\rho\int Rrrdr =$ etc. qui n'eût demandé autre chose que d'avoir la courbe ou l'échelle des densités. Car en supposant que depuis le centre jusqu'à la distance *Ca*, la densité fût exprimée par $Cr = sa$, depuis *a* jusqu'en *b*, par $at = ub$, etc.; il est clair que la ligne *rstuxyzω* serait l'échelle des densités, et qu'on n'aurait, pour résoudre le problème dans ce cas-ci, qu'à faire usage de cette ligne de la même manière qu'on aurait employé la courbe des densités dans la construction générale.



Mais comme nous n'avons point de méthode pour résoudre généralement l'équation $5r^2\rho\int Rrrdr =$ etc., il faut chercher une route qui soit indépendante de cette équation. Pour y parvenir, nous exprimerons chaque ellipticité par une inconnue, et nous formerons autant d'équations en

termes finis, qu'il y a d'inconnues, en nous servant de la même méthode que nous avons employée au § LV, pour trouver l'équation $5r^2\rho\int Rrdrr =$ etc.

Afin de montrer l'application de cette méthode, soient nommées

Φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur.

a, b, c .... z

les demi-axes de toutes les couches

α, β, γ .... ζ

leurs ellipticités,

A, B, C .... Z

leurs densités,

a, b, c .... y

les quantités dont la densité de chaque couche surpasse la densité de la couche suivante.

Soit cherchée ensuite l'équation que donne la couche dont le demi-axe est n, et l'on trouvera

1° que la quantité qu'on exprimait dans le § LV par $\int Rrrdr$, doit être maintenant

$$\tfrac{1}{3}N(n^3-m^3)+\tfrac{1}{3}M(m^3-l^3)+\ldots\ldots+\tfrac{1}{3}Aa^3,$$

et pour abréger je la nomme [N] ;

2°. que la quantité exprimée par $F - \int R d\rho$ sera

$$O(\omega-\nu)+P(\pi-\omega)+\ldots+Z(\zeta-\nu);$$

3°. que la quantité exprimée par..... $\int Rd(r^5\rho)$, sera

$$N(n^5\nu-m^5\mu)+M(m^5\mu-l^5\lambda)+\ldots\ldots+Aa^5\alpha;$$

4°. que la quantité exprimée par $\frac{5}{2}\varphi A$ sera

$$\frac{5}{2}\Phi\frac{[Z]}{z^3}.$$

De là il suit, qu'au lieu de l'équation

$$5rr\rho\int Rrrdr=\frac{5}{2}\varphi Ar^5+Fr^5-r^5\int Rd\rho+\int Rd(r^5\rho),$$

on aura

$$5nn\nu[N]=\frac{5}{2}\Phi\frac{[Z]}{z^3}n^5+n^5(O(\omega-\nu)+P(\pi-\omega)+\ldots+Z(\zeta-\nu))$$
$$+N(n^5\nu-m^5\mu)+M(m^5\mu-l^5\lambda)+\ldots\ldots+Aa^5\alpha$$

que l'on changera facilement en

$$5\nu\frac{[N]}{n^3}=\frac{5}{2}\Phi\frac{[Z]}{z^3}+\nu\mathrm{n}+\omega\mathrm{o}+\ldots\ldots+\nu y+\zeta Z$$
$$+\frac{\nu}{n^5}(m^5\mu\mathrm{m}+l^5\lambda\mathrm{l}+\ldots+a^5\alpha\mathrm{a}).$$

Il est facile de former présentement, d'après cette équation, celles qui con-

viennent aux autres couches, ainsi on n'aura plus qu'à dégager les inconnues α, β, etc., et le problème sera résolu.

On peut abréger considérablement le calcul que demande cette résolution. Pour cela, soit prise l'équation

$$5u\frac{[M]}{m^3} = \frac{5}{2}\Phi\frac{[Z]}{z^3} + \mu m + \nu n + \ldots + \upsilon y + \zeta Z + \frac{1}{m^5}(l^5\lambda l + \text{etc.})$$

que donne la couche placée au-dessous de celle qu'on vient de prendre ; soient retranchées ensuite ces deux équations l'une de l'autre, on aura

$$\nu\frac{[N]}{n^3} = 5\mu\frac{[M]}{m^3} - m\mu\frac{(n^5 - m^5)}{n^5} + \left(\frac{1}{n^5} - \frac{1}{m^5}\right) \times (l^5\lambda l + k^5\chi k + \text{etc.}),$$

qui, avec celles qu'on forme de la même manière, donnera très-facilement le rapport de α avec β, γ, δ, etc.; car soit d'abord formée sur l'équation précédente, celle qui convient à la couche dont le demi-axe est b, on aura

$$5\beta\frac{[B]}{b^3} = 5\alpha\frac{[A]}{a^3} - a\alpha\left(\frac{b^5 - a^5}{b^5}\right),$$

qui donne le rapport de β à α.

Formant de même l'équation qui répond à la couche dont le demi-axe est c, on aura le rapport de γ à α et ainsi des autres.

Les valeurs de β, γ, δ, etc. en α étant trouvées, on n'aura plus qu'à chercher α, ce qui sera facile en se servant d'une seule des équations de la nature de

$$5\nu \frac{[N]}{n^3} = \frac{5}{2} \Phi \frac{[Z]}{z^3} + \text{etc.}$$

§ LXII.

On tire de l'équation

$$5\nu \frac{[N]}{n^3} = 5\mu \frac{[M]}{m^3} - \text{etc.}$$

une proposition assez remarquable, c'est que *le rapport de l'ellipticité d'une couche quelconque à celle de toutes les couches inférieures, ne changera point si on ôte toutes les couches supérieures, et qu'on en substitue un nombre quelconque d'autres, dont les densités et les rayons soient pris à volonté.*

§ LXIII.

On peut encore tirer de la même équation, que *les ellipticités des couches*

doivent augmenter du centre à la surface, les densités étant toujours supposées diminuer, ainsi que les lois de l'hydrostatique le demandent.

Pour le faire voir, je donne à cette équation la forme suivante

$$\frac{1}{\mu} - 1 = \left(\frac{2}{3} + \frac{m^5}{n^5} - \frac{5m^3}{3n^3}\right)\frac{\mathrm{m}}{5[\mathrm{N}]}n^3$$
$$+ \frac{\left(\frac{\lambda l^5}{n^5} - \frac{\lambda l^5}{\mu m^5} - \frac{5l^3}{3n^3} + \frac{5l^3}{3m^3}\right)\mathrm{l}n^2}{5[\mathrm{N}]}$$
$$+ \frac{\left(\frac{\nu k^5}{n^5} - \frac{\chi k^5}{\mu m^5} - \frac{5k^3}{3n^3} + \frac{5k^3}{3m^3}\right)\mathrm{k}n^3}{5[\mathrm{N}]} + \text{etc.}$$

dans laquelle je remarque que

$$\frac{2}{3} + \frac{m^5}{n^5} - \frac{5m^3}{3n^3},\ \frac{l^5}{n^5} - \frac{l^5}{m^5} - \frac{5l^3}{3n^3} + \frac{5l^3}{3m^3},\ \text{etc.}$$

sont nécessairement des quantités positives, aussitôt que $n > m > l > k$, etc. Delà il est aisé de voir que si $\mu > \lambda > \chi$, etc., ν surpassera nécessairement μ. Ainsi il suffira de s'assurer que $\beta > \alpha$ pour être convaincu que $\beta < \gamma < \delta$, etc. Or il est facile de prouver que $\beta > \alpha$ par le moyen de l'équation

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{a^5}{b^5} - \frac{5a^3}{3b^3}\right)\mathrm{a}b^3.}{5[\mathrm{B}]}$$

Donc, etc.

§ LXIV.

Application de la solution du problème précédent, à un sphéroïde composé de deux fluides de différentes densités.

Supposons que ces deux fluides fussent d'abord réunis en globe, le plus dense au centre, et l'autre placé autour en orbe sphérique. Que le rayon du globe composé de la matière la plus dense soit .... a
sa densité .... $1 + \mathrm{a}$
le rayon du globe entier 1
la densité de l'orbe 1

Lorsque la force centrifuge aura donné à la masse fluide la forme que demande l'équilibre, l'ellipticité du sphéroïde entier et celle du sphéroïde intérieur, seront

$$\beta = \frac{5\Phi(1 + a^3\mathrm{a}) \times (5 + 2\mathrm{a} + 3a^5\mathrm{a})}{(10 + 4\mathrm{a}) \times (2 + 5a^3\mathrm{a}) - 18a^5\mathrm{a}}$$

$$\alpha = \frac{25\Phi(1 + \mathrm{a}a^3)^2}{(10 + 4\mathrm{a}) \times (2 + 5a^3\mathrm{a}) - 18a^5\mathrm{a}}.$$

§ LXV.

Limites des aplatissemens que les planètes peuvent avoir, lorsqu'on suppose qu'elles ont été originairement fluides.

La théorie précédente ne peut s'accorder avec l'expérience, qu'en cas que l'ellipticité observée ne passe pas de certaines bornes; car si on suppose qu'une planète ait été originairement toute fluide, elle ne saurait être ni plus aplatie que dans le cas où elle serait homogène, ni moins aplatie que dans le cas où la force de la gravité pousserait tous les corps vers le centre, et où elle agirait suivant la raison renversée du carré des distances à ce centre.

Ce qui fait que les planètes ne sauraient être plus aplaties que dans le cas où elles sont supposées homogènes, c'est que lorsqu'elles sont hétérogènes, les couches les plus denses doivent être les plus voisines du centre : or suivant le § LXIII, il suit de là que les ellipticités vont en augmentant du centre à la surface, et

cette condition, par le § XXXVIII, demande que la planète soit moins aplatie que si elle était supposée homogène.

Quant à ce que les planètes ne sauraient être moins aplaties que dans le cas où la gravité pousserait tous les corps vers le centre, et agirait en raison renversée du carré de la distance; la raison en est que cette hypothèse est la même que celle où l'on supposerait toute la matière de la planète réunie à son centre, supposition qui doit être le terme de toutes celles qu'on peut faire sur l'augmentation de la densité depuis la surface jusqu'au centre.

§ LXVI.

Supposant toujours que les planètes aient été originairement fluides, et non homogènes, il est clair 1° *que la pesanteur doit diminuer sur la surface depuis le pôle jusqu'à l'équateur d'une quantité plus considérable que si elles étaient homogènes; 2° que cette diminution sera proportionnelle au carré du cosinus de la latitude.*

§ LXVII.

Par le § XLIX, *la quantité dont la pesanteur au pôle surpassera la pesanteur à l'équateur, sera exprimée par* $2\varepsilon - \delta$, δ *étant l'ellipticité de la planète, et* ε *celle qu'elle aurait eue si elle avait été homogène.*

CHAPITRE V.

Comparaison de la théorie précédente avec les observations.

§ LXVIII.

Pour la diminution de la pesanteur du nord au sud.

On a vu dans le chapitre précédent, § LXVI, qu'en supposant qu'un sphéroïde ne soit pas homogène, la diminution de la pesanteur, du pôle à l'équateur, doit être plus grande qu'elle ne

le serait si le sphéroïde était homogène. De là il suit, que si ma théorie a lieu pour la Terre, la diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur doit être ou égale à $\frac{1}{230}$ ou plus grande, et ne saurait jamais être plus petite, puisque la raison de 230 à 231, est, par le § XXI, celle qui doit être entre les actions de la pesanteur à l'équateur et au pôle, si la Terre est supposée homogène.

Or cette conclusion, tirée de ma théorie, est entièrement conforme à ce que l'expérience nous a appris ; car dans toutes les observations qu'on a faites sur la pesanteur, soit en mesurant actuellement la longueur du pendule qui bat les secondes, soit en comparant la marche de la même horloge en des lieux dont la latitude est différente, on a toujours trouvé que la diminution de la pesanteur, en allant du nord au sud, était plus grande qu'elle ne serait, si la diminution totale depuis le pôle jusqu'à l'équateur était de $\frac{1}{230}$.

§ LXIX.

Pour le rapport des axes de la Terre.

Si on suppose, comme dans le chapitre précédent, que la Terre ait été originairement fluide, il est clair, par le § LXV, que le rapport de ses axes ne peut jamais être plus grand que celui de 230 à 231, puisque (§ XX) ce rapport est celui qu'on trouverait en la supposant homogène. Et comme les mesures de la pesanteur ne nous permettent pas de supposer les parties de la Terre d'égale densité, il faut donc que les axes de la Terre soient dans un rapport moindre que celui de 230 à 231.

Si on ne veut pas se restreindre à supposer que l'arrangement des parties intérieures de la Terre, est celui qu'elles auraient pris d'elles-mêmes si elles avaient été autrefois fluides; mais qu'on admette, ainsi que dans les chapitres III et IV, toute la généralité possible dans la variation de la densité et des rapports des axes et des couches, depuis le centre

jusqu'à la surface, on verra que la différence des axes doit être encore, dans ce cas, moindre que $\frac{1}{230}$: car on sait, par le § L, que la diminution totale de la pesanteur depuis le pôle jusqu'à l'équateur étant donnée, il suffit de retrancher la fraction qui l'exprime de $\frac{1}{115}$, afin d'avoir la différence des axes ; or la diminution de la pesanteur étant trouvée, par toutes les expériences, plus grande que $\frac{1}{230}$, il faut que l'ellipticité soit plus petite que cette même fraction, c'est-à-dire que le rapport des axes soit moindre que celui de 230 à 231.

Il n'en est pas de cette conclusion de ma théorie comme de celle que j'en ai tirée dans le § précédent, car le degré mesuré au Nord étant comparé au degré mesuré en France, on trouve que le rapport des axes est celui de 177 à 178, plus grand que celui de 230 à 231, au lieu d'être plus petit comme il le faudrait.

Comme la mesure faite au Nord a été exécutée avec une grande exactitude et beaucoup d'attention, il paraît d'abord que le résultat de cette mesure doit être préféré à celui que donne ma théorie ;

cependant si on fait attention aux erreurs inévitables des mesures actuelles et aux limites de ces erreurs, on verra que, sans faire tort à ces mesures, on peut les rapprocher de ma théorie, et trouver un résultat commun.

Car en faisant le calcul nécessaire, on trouvera qu'il ne faudrait pas retrancher 60 toises de la différence des degrés de Paris et de Tornéo, pour trouver les axes dans le rapport de 230 à 231 : or si on remarque ce que c'est que 60 toises sur deux opérations qui demandent chacune tant d'observations astronomiques et géographiques, on verra qu'on peut supposer une erreur un peu plus considérable que 60 toises, sans faire tort ni à la mesure du Nord, ni à celle de M. Picard, et alors la théorie et l'experience seront d'accord.

Qu'on suppose, par exemple, que la différence des degrés de Paris et de Tornéo ait été trouvée trop grande de 80 toises, on aurait pour la différence des axes de la Terre environ $\frac{1}{260}$, et retranchant cette fraction de $\frac{1}{115}$, on trouverait $\frac{1}{206}$ pour la diminution de la pesanteur du

pôle à l'équateur, ce qui s'accorderait assez bien avec les observations faites en France et en Laponie, avec l'excellente pendule de M. Graham.

Au reste, quoique les erreurs qu'il faudrait supposer dans les observations, pour les accorder avec ma théorie, soient assez légères, je me garderai bien d'assurer qu'elles aient été commises, c'est un fait qu'on ne pourra vérifier qu'avec les mesures que nous attendons du Pérou : car la grande différence qui doit être entre le degré de Quito et celui de Tornéo, est la seule chose qui puisse décider si le rapport des axes est plus petit ou plus grand que celui de 230 à 231.

Lorsqu'il ne s'agit que de démontrer l'aplatissement de la Terre, la mesure des degrés de Tornéo et de Paris est plus que suffisante ; mais si on veut avoir le vrai rapport des axes, ce ne peut être que par la comparaison des degrés les plus éloignés.

Ce rapport une fois déterminé, s'il se trouve plus petit que celui de 230 à 231, il sera très-facile, par ce qui précède, de former des hypothèses sur l'intérieur de

la Terre qui conviennent avec la théorie et les observations, soit qu'on admette que la Terre ait été originairement fluide, soit qu'on ne l'admette pas.

Mais si ce rapport se trouvait incontestablement plus grand que celui de 230 à 231, j'avoue que non-seulement il faudrait abandonner la théorie que j'ai établie dans cette seconde partie, mais qu'il serait difficile de concilier les mesures du pendule avec celle des degrés dans le système de M. Newton. Je crois même pouvoir assurer que si on y réussissait, ce ne pourrait être qu'en employant des hypothèses qui auraient bien peu de vraisemblance.

§ LXX.

Pour le rapport des axes de Jupiter.

Si on supposait que toute la matière dont Jupiter est composé fût infiniment rare par rapport à celle qui est au centre de cette planète, ou, ce qui revient au même, si on voulait que les parties de Jupiter, au lieu de s'attirer les unes les autres, fussent toutes poussées vers le

centre de cette planète ; il est clair que le rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur de Jupiter, serait celui de 1 à 11,615, déterminé au § XXII, par la formule $\frac{T^2}{h^3 t^2}$. Car comme, dans cette hypothèse, la force de la gravité à l'équateur de Jupiter serait à la force que cette planète exerce sur le satellite, en raison du carré de la distance du satellite au carré du rayon de l'équateur de Jupiter ; il s'ensuivrait que la force centrifuge à l'équateur de Jupiter serait à la gravité au même lieu, en raison composée du cube de la distance du satellite au carré du temps de la rotation de Jupiter.

Cela posé, il est facile de trouver quel serait le rapport des axes de Jupiter dans cette hypothèse ; il suffit pour cela de recourir au § XXIX de la première partie, et l'on trouvera que le demi-axe de cette planète serait à son équateur dans la raison de 23,23 à 24,23.

Mais si, au lieu de supposer toute la matière de Jupiter réduite au centre, on la supposait homogène, on a vu (§ XXII) que le rapport des axes serait, en ce cas,

celui de 100 $\frac{1}{2}$ à 90 $\frac{1}{2}$. Donc, par le §LXV, pour que les observations s'accordent avec ma théorie, il faut que l'ellipticité de Jupiter se trouve entre $\frac{1}{23}$ et $\frac{1}{9}$, or c'est ce qui arrive en effet; car des excellentes observations de MM. Cassini et Pound, il résulte que le rapport des axes de Jupiter est entre celui de 13 à 14, et celui de 10 à 11.

La théorie précédente se trouvant donc d'accord avec toutes les mesures du pendule et avec l'observation des diamètres de Jupiter; s'il arrive, outre cela, que les mesures que nous attendons du Pérou comparées à celles qui ont été faites en Laponie, rendent la différence des axes moindre que $\frac{1}{230}$, cette théorie aura toute la confirmation possible, et la gravitation universelle, qui s'accorde si bien avec les mouvemens des planètes, s'accordera encore avec leurs figures.

FIN

TABLE DES CHAPITRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Principes généraux pour trouver les hypothèses dans lesquelles les fluides peuvent être en équilibre, et pour déterminer la figure de la Terre et des autres planètes, lorsque la loi de la pesanteur est donnée.

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES.

